NOÇÕES INTUITIVAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO: É POSSÍVEL?[1]

Ana Júlia dos Santos da Silva[2]

Resumo: O presente artigo constitui-se a partir de uma pesquisa elaborada como trabalho de sistematização do curso em Matemática – Licenciatura, a qual visa discutir acerca do estudo de noções do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio, de forma especial ao conceito de limite, e possíveis tratativas neste nível de ensino. A pesquisa caracteriza-se por uma abordagem qualitativa e considera atividades elaboradas e desenvolvidas pela pesquisadora com um grupo de alunos do segundo ano do ensino médio de uma Escola Militar da rede estadual de ensino. O material empírico da pesquisa constitui-se a partir do planejamento de aulas, anotações no diário de campo e registros dos alunos produzidos a partir do desenvolvimento do planejamento. Os dados foram analisados com base nas proposições de Bento Jesus Caraça (1951), Nilson José Machado (1990), a partir das unidades de análise: "Triângulo de Sierpinski: Progressão Geométrica e Função Exponencial" e "Quanto maior a quantidade de termos da PG, mais fácil será a verificação da tendência desta sequência?". As análises indicam que é possível trabalhar com alunos do ensino médio noções básicas do Cálculo de forma intuitiva, de tal forma que possibilitem a produção de sentidos e a negociação de significados.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral; Noção Intuitiva de Limite; Alunos do Ensino Médio; Progressão Geométrica; Função Exponencial.

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral, de forma especial a noção de Limite, é, hoje, pouco ou nada trabalhada na educação básica brasileira, até mesmo porque, o estudo de tais conceitos não consta nas orientações curriculares para o ensino médio – OCEM (BRASIL, 2006), bem como nos demais documentos que orientam o currículo de matemática deste nível de ensino. Em alguns livros didáticos, tanto mais antigos quanto atuais, encontra-se tópicos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral abordados na forma de noções intuitivas, sendo o estudo do limite tratado, principalmente, a partir do conceito de Progressão Geométrica. Onuchic e Huanca contribuem com estas afirmações ao afirmarem que "o conceito de limite é responsável pela compreensão e

---

[1] Artigo elaborado como sistematização do curso de Matemática - Licenciatura para o Componente Curricular: Estágio Curricular Supervisionado, sob orientação da professora MsC. Isabel Koltermann Battisti.

[2] Graduanda do curso de Matemática – Licenciatura da UNIJUÍ – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. ana_juliass@yahoo.com.br.

pelo significado de vários tópicos da educação básica" (2013, p. 321), como por exemplo, pela identificação das geratrizes das dízimas periódicas e na construção de gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, além das Progressões Geométricas quando se procura a soma de seus termos ou analisa-se a PG decrescente. Entretanto, esses temas, na maioria das vezes, não são trabalhados, sob o pretexto de serem conceitos complexos, que exigem um alto nível de abstração e que, assim, são impróprios para este nível de educação básica.

Nesse sentido, é importante salientar que o currículo escolar de matemática no Brasil sofreu muitas reformas ao longo da história. E o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, que ora esteve incluído no currículo de matemática do ensino médio, hoje se encontra somente no programa curricular de Escolas Militares e no ensino superior. O que nos leva a refletir e a questionar sobre as causas de outras escolas não adotarem esta mesma estrutura curricular, ou ainda da importância e do significado destes conceitos fazerem parte do currículo de matemática no ensino médio.

De acordo com Busse e Soares (2007), o estudo de limite, particularmente, pode partir de noções intuitivas, do infinitésimo, da continuidade, pois são noções potencialmente complexas e envolvem raciocínios de matemática avançada, mas que podem desencadear nos alunos um raciocínio dedutivo e compreensivo acerca dos conceitos matemáticos, devido às ideias novas que ele pode propiciar e pelo vasto alcance de seus métodos. Visto que, o estudo do Cálculo de acordo com Caraça (1951), permeia toda a análise matemática e, portanto, seu estudo ocupa uma posição central para os cursos de exatas.

Nilson José Machado (1990) amplia estas discussões ao afirmar que o Cálculo Diferencial e Integral contempla questões relacionadas com a medida da rapidez com que as grandezas aumentam ou diminuem, os objetos se movem ou, ainda, com que as coisas se transformam. Sendo o conceito limite responsável pela fundamentação teórica rigorosa aos conceitos de derivação e integração.

É válido ressaltar, que a professora/pesquisadora deste trabalho, enquanto professora da rede pública estadual de ensino e atuante em uma Escola Militar, teve acesso ao plano de ensino de matemática, o qual contempla o estudo do Cálculo Diferencial e Integral para o terceiro ano do Ensino Médio. No entanto, ideias constitutivas do Cálculo estão inseridas em muitos conceitos matemáticos, sendo possível, dessa forma, trabalhá-lo em diferentes momentos e tópicos deste nível de ensino, de forma especial ao tratar do conceito de funções no primeiro ano e sequências no segundo ano do ensino médio. Por isso, torna-se tão intrigante pensar porque o estudo do Cálculo encontra-se citado no Plano de Ensino da Escola Militar pesquisada, somente no final do terceiro ano, enquanto que teria sentido se trabalhado no primeiro e no segundo ano. Será que falta compreensão da aplicabilidade até mesmo de quem elabora esta proposta?

Barroso et al (2009, p. 100), em estudos desenvolvidos sobre a definição intuitiva e a definição formal de limite, apontam que a maioria dos alunos "[...] são capazes de resolver praticamente todos os exercícios propostos pelo livro-texto, sem, no entanto, entender o conceito de limite, de que derivam todas as definições principais do cálculo". Ressaltam ainda que é suficiente que o aluno saiba resolver operações que envolvam o conceito de limite, além de saber aplicar estes conceitos em diferentes situações/contextos específicos. Embora, entenda-se que o aprendizado de determinado conceito esteja diretamente relacionado com a capacidade de o aluno resolver situações problemas, nas quais os conceitos são tratados tanto na forma de objeto como na forma de ferramenta.

Oliveira (2010) propõe em seus estudos a inclusão de noções do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio, defendendo a inclusão destes conceitos no currículo escolar. A referida autora analisa, ainda, como este estudo é abordado em alguns livros didáticos para o ensino médio e, nesse sentido, ressalta a importância de relacionar o ensino do Cálculo com conteúdos de matemática tratados na educação básica, no momento em que os mesmos forem estudados. Visto que, este ensino já esteve presente no currículo das escolas brasileiras, mas acabou sendo excluído após o movimento da Matemática Moderna e, então, deixou-se de ser trabalhado. No entanto, acredita-se que,

> [...] o ensino de Cálculo deva fazer parte do programa curricular de matemática, pois os conceitos estudados incentivam, no estudo de funções, a busca de soluções de problemas modelados. Assim, o aluno trabalha com funções analisando as suas propriedades principais (OLIVEIRA, 2010, p. 55).

Para Busse e Soares (2007), é importante preparar os alunos do Ensino Médio através da inclusão do Cálculo Diferencial e Integral e estratégias que contemplem a interdisciplinaridade, tornando mais amplo e significativo o aprendizado dos alunos. Segundo os mesmos autores, fundamentado nas proposições de Ávila,

> [...] os professores insistem em cumprir programas extensos, com conteúdos fragmentados e sem significado. No ensino de funções, gasta-se muito tempo para introduzir uma extensa nomenclatura com poucos resultados práticos. Na sua opinião, seria mais proveitoso utilizar esse tempo com o ensino das noções básicas do Cálculo e de suas aplicações. Dessa forma, o ensino das funções seria feito de forma contextualizada e integrada, de acordo com a proposta dos PCN's (BUSSE, SOARES, 2007, p.3).

Diante destas breves considerações, a presente escrita fundamenta-se numa pesquisa a qual objetiva *discutir o estudo de noções do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio e possíveis possibilidades de tratativas destes conceitos neste nível de ensino*, a partir da questão*: quais as ideias de limite são produzidas pelos alunos do ensino médio a partir do desenvolvimento de atividades que envolvam o conceito de Progressão Geométrica?*

1. Material de Pesquisa e Procedimentos Metodológicos

Esta é uma pesquisa de cunho qualitativo, uma vez que tem caráter exploratório, nos quais se desenvolvem ideias e entendimentos a partir de padrões e recorrências encontrados nos dados do material empírico e na bibliografia. A pesquisa qualitativa busca percepções sobre a natureza geral dos conceitos estudados, abrindo espaço para a interpretação, sendo seu objetivo final, de acordo com Minayo (2010), construir e/ou revisar novas abordagens e novos conceitos referentes ao objeto estudado.

A partir deste entendimento, desenvolveram-se os procedimentos metodológicos. Iniciou-se esta pesquisa desenvolvendo leituras e estudos acerca do conceito de noções intuitivas de limites e do Cálculo Diferencial e Integral, considerando entendimentos de vários autores que discutem sobre este tema.

Analisou-se também o Plano de Ensino de matemática do ensino médio, de escolas públicas e dentre estes, o Plano de Ensino de uma Escola Militar estadual. E nesta última, encontrou-se listado o estudo de noções de limites e derivadas para o terceiro ano do ensino médio. Além disso, foi feita uma busca em alguns livros didáticos de matemática no ensino médio, considerando tratativas acerca de tópicos do Cálculo Diferencial e Integral abordados na forma de noções intuitivas.

Feitos os estudos iniciais, elaborou-se um planejamento que contemplasse atividades desencadeadoras de aprendizagens, o qual foi desenvolvido, pela própria pesquisadora[3], em duas aulas de matemática de uma turma de alunos do segundo ano do ensino médio de uma Escola Militar. As referidas atividades consideraram noções intuitivas de Limites a partir de ideias e conceitos relacionados à Progressão Geométrica e à soma dos termos de Progressões Geométricas.

O planejamento considerou a construção, no software Geogebra, de um fractal já conhecido pelos alunos, o Triângulo de Sierpinski. A cada iteração proposta para a construção do Triângulo de Sierpinski, são constituídos novos triângulos a partir do ponto médio dos lados dos triângulos remanescentes da iteração anterior. No desenvolvimento do planejamento, os alunos foram questionados acerca do que estava acontecendo com a quantidade de triângulos remanescentes a cada iteração feita e, simultaneamente, o que acontecia com a medida dos lados dos triângulos formados. Porém, antes deste processo, a pesquisadora optou por relembrar aos alunos sobre alguns conceitos essenciais a respeito das sequências, Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG), através de um esquema construído no quadro. No momento de retomada, questionou-se os alunos principalmente sobre a PA e a PG infinitas e analisou-se a tendência de seus valores, partindo de um exemplo dado (PA de razão dois e PG de razão dois). Já durante a construção no software os alunos foram questionados acerca da tendência da PG de razão menor que -1 e maior que 1, ou seja, de razão entre -1 e 1 $(-1 < q < 1)$.

Desta forma, o planejamento, juntamente com anotações no diário de campo, arquivos produzidos nas representações no software Geogebra e com os registros dos alunos produzidos a partir do desenvolvimento do planejamento, constitui o material empírico da pesquisa. Dos dados produzidos, foram selecionados aqueles que, neste momento, possibilitam o atendimento aos objetivos da presente investigação. Estes foram analisados mediante proposições de Bento Jesus Caraça (1951); Nilson José Machado (1990), a partir das unidades de análise: “Triângulo de Sierpinski: Progressão Geométrica e Função Exponencial” e “Quanto maior a quantidade de termos da PG, mais fácil será a verificação da tendência desta sequência?”. Nesta segunda, serão analisados registros produzidos pelos alunos. Neste momento, os alunos serão

[3] Atua como professora de matemática da referida turma.

identificados como A1, A2, A3, e assim sucessivamente e ainda, seus registros serão representados em *itálico.*

2. Limite: que ideias são produzidas por alunos do ensino médio

No decorrer das últimas décadas os currículos, tanto da educação básica como do ensino superior, foram sofrendo alterações/adaptações. Diante disso, o estudo do Cálculo tem sido minimamente tratado no ensino médio. Tal assunto encontra-se somente em alguns currículos do ensino médio, e no ensino superior, é encontrado especificamente nos cursos de ciências exatas. O fato é que quando abordado no ensino superior, de acordo com entendimentos apresentados por Machado (1990), geralmente inicia-se pela definição do conceito de limite e a partir daí, tratativas se estabelecem considerando, geralmente, técnicas operatórias, ficando o estudo da derivada como um tipo especial de limite e o estudo da integral, na maioria das vezes, nem é mencionado.

Outro fato preocupante, de acordo com Machado (1990), é que as definições formais destacam-se como principais e exclusivas no estudo do Cálculo. Enquanto que a Língua Materna poderia ser uma grande alternativa para a significação desses conceitos, através de uma apresentação mais informal, como através de exemplos numéricos ou gráficos.

É importante salientar que o conceito de limite é a base para o estudo da derivação e da integração, e, portanto, essencial para o ensino do Cálculo, seja na educação básica ou no ensino superior. No entanto, o ensino de tais conceitos, principalmente na educação básica, precisa ser analisado e pensado intensamente, para que se estabeleçam aprendizagens significativas e não apenas com ou a partir de técnicas operatórias.

2.1. Triângulo de Sierpinski: Progressão Geométrica e Função Exponencial

O Triângulo de Sierpinski pertence a um conjunto de objetos matemáticos chamado de fractais, que são figuras caraterizadas por não perderem a sua definição inicial à medida que são ampliadas ou reduzidas, ou seja, possuem características que se repetem ao longo de sua construção. Este triângulo foi idealizado pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski, em 1915, e é obtido pelo limite de um processo repetitivo. Para iniciar o processo parte-se de um triângulo equilátero e em seguida unem-se os pontos médios de cada lado do triângulo. Formam-se quatro triângulos que possuem seus lados ligados. Destes quatro, retira-se o triângulo central. Este procedimento pode ser repetido indefinidamente para cada triângulo obtido em cada iteração. Conforme se pode observar na imagem abaixo:

Figura 1: Iterações na representação do Triângulo de Sierpinski.

Fonte: Rio Grande do Sul, 2009.

A atividade desenvolvida pela pesquisadora consistiu na construção do Triângulo de Sierpinski no software Geogebra, uma vez que o grupo de alunos em questão já conheciam as características dos fractais, bem como a deste triângulo especial. Cabe ressaltar que esta construção se deu no coletivo, pesquisadora e alunos, e foi marcada por questionamentos desencadeados pela participação e pela visualização que a representação possibilitou aos alunos. A seguir apresenta-se um recorte do planejamento que contempla questionamentos feitos no decorrer da construção do Tiângulo de Sierpinski no software GeoGebra.

- *Inicialmente quantos triângulos tinham?*
- *Com a primeira iteração, quantos triângulos remanescentes ficaram? E na segunda? E na terceira?*
- *Então, o que está acontecendo com a quantidade de triângulos a cada iteração?*
- *Este crescimento é característico de quê modelo?*
- *Existe um limite de triângulos remanescentes que poderão ser formados?*
- *Na quinta iteração quantos triângulos teriam? E na sexta? E na décima?*
- *A quantidade de triângulos remanescentes tende para algum valor? Ou cresce infinitamente? Neste caso, há um limite? Por quê?*
- *E com relação à medida do lado dos triângulos equiláteros formados. Que relação tem a medida dos lados do triângulo inicial com os formados na primeira iteração?*
- *Isso sempre acontecerá de iteração a iteração? Por quê?*
- *Neste caso, podemos dizer que a medida do lado do triângulo tende para algum valor? Então possuí um limite? Ou não?*

Fonte: Planejamento (SILVA, 2014).

No movimento entre representações e questionamentos, a participação dos alunos aconteceu de forma ativa, interagindo com a pesquisadora durante toda construção no software. Quando questionados a respeito do modelo de crescimento dos triângulos remanescentes a cada iteração, a maioria dos alunos respondeu que esta quantidade representava um crescimento em Progressão Geométrica, embora um aluno tenha respondido que se tratava de um crescimento exponencial. A pesquisadora, neste momento, de acordo com anotações no diário de campo, aproveitou para salientar a ideia de que a PG cresce exponencialmente (representando a lei da função e a lei da sequência que dá origem à quantidade de triângulos remanescentes) e, portanto, as duas respostas estavam corretas. Entretanto, dizer que o modelo é do tipo exponencial é a forma mais adequada, matematicamente. A análise desta situação possibilita indicar que o mais importante, neste momento, é de que a ideia do crescimento de triângulos tenha ficado evidente para os alunos, pois na medida em que forem questionados sobre iterações maiores, é ampliada a possibilidade do estabelecimento de processos de generalização e, assim, do cálculo através de um modelo. É possível, ainda, indicar, a partir das análises, que os alunos perceberam que a quantidade de triângulos não se aproximava, não tendia, para nenhum valor, pois aumentava infinitamente, não existindo, dessa forma, um limite de triângulos remanescentes possível. Essa noção intuitiva de limite elaborada pelos alunos pode ser percebida também, em uma questão avaliativa encaminhada pela pesquisadora e respondida pelos alunos, na qual se obteve um resultado muito satisfatório, já que, de 56 alunos que responderam a esta questão, houve somente 5 respostas negativas, três alunos que não responderam (deixaram a questão em branco), e, portanto, 48 respostas positivas. Dessa forma, é possível verificar o potencial das atividades desenvolvidas com os alunos.

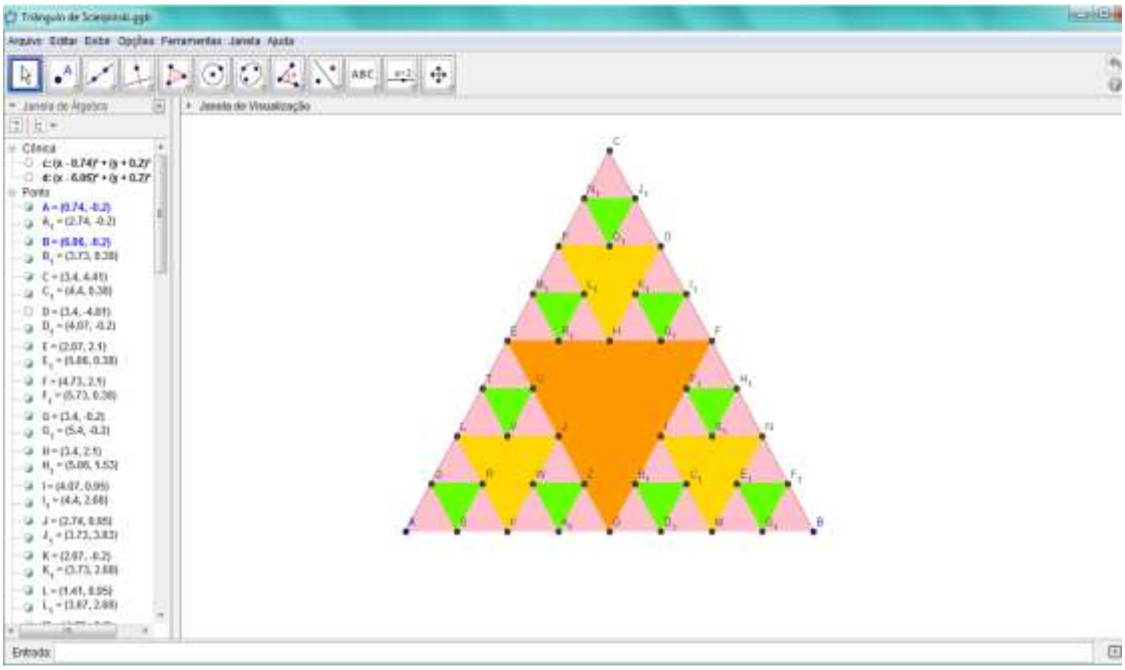
Cabe ressaltar que com o intuito de desenvolver uma aprendizagem significativa de limites, considerando noções intuitivas, a visualização se faz imprescindível, assim como a discussão em grupo. Machado (1990, p. 155) amplia as condições de análise ao afirmar que

> O recurso à Língua Materna como suporte de significados para a apreensão dos conceitos básicos do Cálculo é o caminho natural para um retorno às ideias originais de Newton e Leibniz, com a consequente reativação dos vínculos de tais ideias com os mais diferentes discursos.

Nesse sentido, através da construção do Triângulo de Sierpinski, (Figura 2), no software Geogebra, passo a passo e concomitante com os questionamentos propostos pela professora/pesquisadora, é possível apontar, a partir das análises, que os alunos perceberam que a quantidade de triângulos remanescentes aumentava exponencialmente a cada iteração e, portanto, aumentaria infinitamente, não existindo limite para este modelo matemático, pois não tende a um valor bem definido, demonstrando assim significação do conceito.

Na Figura 2, apresenta-se a representação do Triângulo de Sierpinski até a terceira iteração, construída com os alunos durante a atividade no software Geogebra.

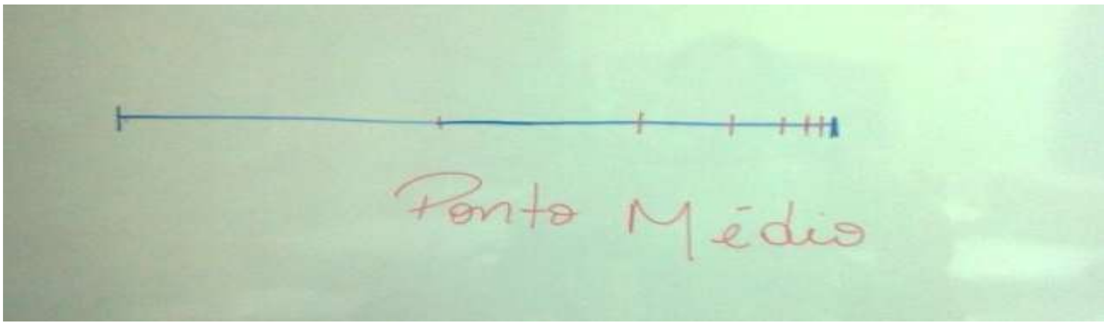
Figura 2: Triângulo de Sierpinski no software Geogebra.



Fonte: Arquivos (SILVA, 2014).

Dando continuidade ao planejamento, a professora/pesquisadora questionou os alunos, com relação à medida dos lados dos triângulos (equiláteros) formados, ou seja, qual a relação dessa medida entre uma interação e a próxima. Como a construção do Triângulo de Sierpinski se dá através do ponto médio dos lados dos triângulos representados por segmentos de reta, os alunos salientaram que a medida dos lados estava se resumindo a metade, de iteração para iteração. Entretanto, quando questionados a respeito da tendência para algum valor especial, de acordo com o material empírico, uma aluna respondeu rapidamente que ali havia uma tendência para zero, enquanto que outro aluno questionou o porquê, pois para ele, esta medida continuaria diminuindo infinitamente e, portanto, tenderia ao infinito negativo. Dessa forma, para demonstrar a este aluno que isto não era possível e visando compreender melhor a tendência da medida do lado dos triângulos formados a cada iteração, a professora/pesquisadora, de acordo com anotações no diário de campo, representou no quadro o segmento de reta que daria origem à base do primeiro triângulo (Figura 3), e partir daí, traçou seu ponto médio, representando cada iteração, uma vez que é desta forma que se dá a constituição deste fractal.

Figura 3: Segmento que representa a base dos triângulos.



Fonte: Arquivos (SILVA, 2014).

Analisando esta representação/demonstração percebe-se que nela encontraram-se algumas regularidades e que há uma tendência para zero, ou seja, quanto maior o número de iterações, mais a medida dos lados dos triângulos se aproxima de zero, mas nunca chegaria a ele de fato, visto que esta medida jamais poderia ser nula, pois neste caso não haveria um triângulo, ou um valor expresso por um número negativo, pois a medida do comprimento é dado em módulo.

De acordo com Caraça (1951, p. 234), “[...] é frequente ouvir dizer a respeito de limite que *é aquilo de que uma variável se aproxima indefinidamente sem nunca o atingir”*, mas segundo o autor, essa frase possuí uma afirmação errônea e imprecisa, em sua última parte – *sem nunca o atingir* – pois, ainda de acordo com Caraça “[...] uma sucessão numerável pode atingir seu limite uma, duas, uma infinidade de vezes!”.

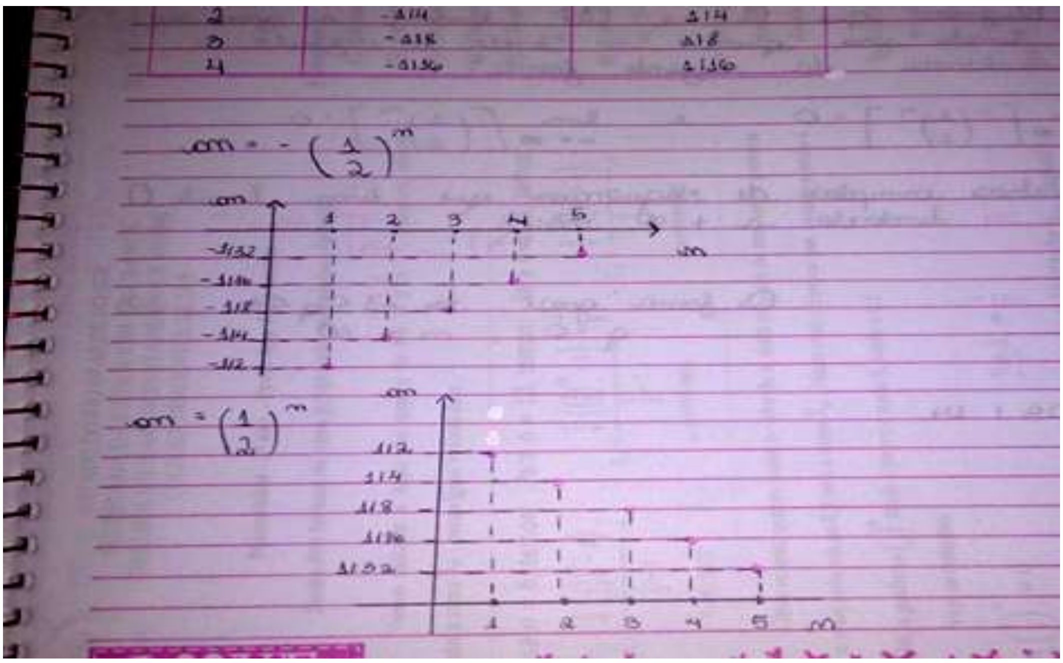
Embora, obviamente, no caso da atividade realizada pela professora/pesquisadora, a sequência jamais atingirá seu limite. Entretanto, é importante frisar que essa afirmação não compõe a definição de limite, não se tratando de uma regularidade que acontecerá em todas as situações, visto que, a sequência pode atingir seu limite, em outras ocasiões.

Diante destas colocações, as análises indicam que os alunos facilmente chegaram à conclusão de que a medida do lado dos triângulos formados a cada iteração estava tendendo para zero, pois a cada iteração esta medida se reduzia a metade da medida do lado dos triângulos anteriores.

Analisando o planejamento e as anotações do diário de campo é possível indicar que este grupo de alunos, desde o início dos estudos das Sequências Numéricas, já vinham habituando-se a algumas nomenclaturas matemáticas características do estudo intuitivo de limites, como: “aproximação”, “tendência”, “limitada/ilimitada”, “infinitésimo”. Nesse sentido, acredita-se que este fato tenha também contribuído e facilitado os encaminhamentos das atividades no decorrer da aula.

Após todas as discussões que repercutiram com esta atividade (retomada de conceitos e sistematização prévia), a professora/pesquisadora solicitou aos alunos que representassem graficamente em seus cadernos (Figura 4), duas Progressões Geométricas de razão $q = 1/2$, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e a outra $a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Cabe ressaltar que estes alunos já haviam realizado a representação gráfica de outras sequências (Progressões Aritméticas e algumas Progressões Geométricas de razão maior que um $q > 1$ e razão menor que menos um $q < -1$).

Figura 4 – Representação Gráfica das Progressões Geométricas.



Fonte: Arquivos (SILVA, 2014).

Analisando as anotações no diário de campo produzidas a partir desta representação, é possível indicar que os alunos, com a análise da representação gráfica, na qual a pesquisadora solicitou que deveria ser encontrado o valor para o qual a curva estava tendendo, puderam verificar que novamente havia uma tendência para zero, uma vez que as duas Progressões possuíam razão entre -1 e 1 $(-1 < q < 1)$.

Feita estas análises, a professora/pesquisadora entregou aos alunos, um material contendo alguns encaminhamentos a respeito da soma dos termos da PG, conforme segue abaixo.

Figura 5: Material encaminhado aos alunos.

Vamos calcular a soma dos termos da PG $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$. Primeiro, vamos calcular a soma S_n , para alguns valores de n.

Para $n = 6$, temos:	Para $n = 13$, temos:	Para $n = 25$, temos:
$S_6 = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} =$ $= 0{,}4921875$	$S_{13} = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{13} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} =$ $\simeq 0{,}49993896$	$S_{25} = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} =$ $\simeq 0{,}49999998$

Observe que, quanto maior o valor de n, mais próxima de zero será a potência $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e mais próxima de 0,5 será a soma S_n . Nesse caso, dizemos que, quando n tende a infinito, a potência $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende a zero e a soma S_n tende a 0,5.

Veja as notações:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ Lemos: o limite de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, quando n tende a infinito, é igual a zero.	$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$ Lemos: o limite de S_n, quando n tende a infinito, é igual a $\frac{1}{2}$.

Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ uma progressão geométrica em que $-1 < q < 1$. Quando n tende a infinito, a potência q^n tende a zero. Com essas informações, vamos calcular o limite da soma S_n :

$$S_n = \frac{a_1\cdot(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1\cdot(0 - 1)}{q - 1}$$

. Logo, para $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Fonte: Planejamento (SILVA, 2014).

O encaminhamento acima, entregue aos alunos pela pesquisadora, objetivou a sistematização e a formalização das ideias conjecturadas até então, com o desenvolvimento do planejamento, analisando a soma dos termos de uma PG infinita. Nesse sentido, como é possível observar no material acima, parte-se da apresentação de uma Progressão Geométrica de razão $q = \frac{1}{2}$ (propositalmente) e apresenta-se a soma desta sequência considerando alguns termos (primeiramente a soma dos 6 primeiros, logo após, a soma dos 13 primeiros e dos 25 primeiros). Com esse movimento é possível perceber que esta soma está se aproximando de um valor "x", ou seja, tendendo ou convergindo para um único valor. Esta é a ideia central pretendida pela pesquisadora.

Seguindo com o planejamento, a pesquisadora pede aos alunos que observem o que acontece com a razão desta sequência conforme aumenta o número de termos da mesma. É importante destacar, analisando este encaminhamento, que fica evidente aos alunos perceber que esta potência, ou seja, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ficará mais próxima de zero, quanto maior número de termos for considerado.

Dessa forma, quando se pretende calcular a soma dos termos de uma PG infinita, utiliza-se da mesma fórmula do soma dos n primeiros termos da PG, considerando, entretanto, para este caso, que a potência, q^n tende a zero. Uma vez que um número entre -1 e 1 (razão da PG) se elevado a números grandes, se tornará cada vez menor. E substituindo esses dados na fórmula inicial e organizando o modelo, chega-se a soma dos termos de uma PG infinita. Cabe ressaltar que como se trata de uma sequência infinita, não é possível encontrar o número exato desta soma. Pode-se somente, encontrar uma aproximação, ou seja, o valor para o qual a soma tenderá ou estará convergindo. Esta situação explicita a noção de limite, representando o infinitésimo e a aproximação de valores. A análise do material empírico considerado até então possibilita conjecturar que processos de investigação, de análise e de síntese estruturaram o planejamento e o desenvolvimento das aulas consideradas na pesquisa.

A língua materna e a linguagem matemática articuladas a partir de atividades que possibilitem a visualização e a generalização, ou da resolução de problemas, favorecem um caminho de ensino e de aprendizagem em matemática. De acordo com Onuchic e Hauanca (2013, p. 329), o ensino e a aprendizagem ocorrem simultaneamente "[...] durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como construtores desse conhecimento".

Nesse processo, de acordo com as análises é possível indicar que alguns alunos questionaram a respeito da tendência do lado do triângulo, enquanto que para outros, esta regularidade estava muito óbvia. Fica claro, dessa forma, a diversidade de sujeitos e interpretações dentro de uma sala de aula e, portanto, a importância de o professor buscar diferentes alternativas de ensino e diferentes encaminhamentos de suas aulas, para que o conhecimento possa atingir a toda a heterogeneidade da sala de aula.

Cabe ressaltar, ainda, diante das análises, que a visualização da tendência para zero da medida do lado do triângulo no software Geogebra, neste momento, se fez importante em demasia, visto que para aqueles alunos que apresentavam maiores dificuldades na percepção das regularidades do processo de construção do Triângulo de Sierpinski, os encaminhamentos da professora/pesquisadora possibilitaram voltar algumas etapas e demonstrar novamente parte da sua construção, e assim, preencher as lacunas que haviam ficado, potencializando, dessa forma, a aprendizagem dos conceitos pretendidos pela atividade, compondo as diferentes formas de representação algébrica e geométrica.

Fischbein (1994), apud Igliori (2009, p.14,15), afirma sobre o entendimento de matemática que queremos atingir nos nossos alunos:

> [...] (a) matemática como um corpo de conhecimento rigoroso, formal e dedutivo como exposto em tratados livros textos de alto nível; (b) matemática como uma atividade humana. O fato de que o ideal da matemática é obter um corpo de conhecimento logicamente estruturado não exclui a necessidade de considerar matemática também como um processo criativo: Na verdade, o que pretendemos **são estudantes para entender que matemática é, essencialmente, uma atividade humana, que matemática é inventada por entidades humanas**. **O processo de criação da matemática implica momentos de iluminação, hesitação, aceitação e refutação; muito frequentemente, séculos de esforços, sucessivas correções e refinamentos. Nós os queremos para ensinar não somente o formal, sequências dedutivas de resultados relacionados a um teorema, mas também para tornarem-se capazes de produzir, por si próprios, afirmações matemáticas, para construírem as respectivas provas, para avaliarem não apenas de modo formal, mas também intuitivamente, a validade das proposições matemáticas**. [Grifos nossos]

As ideias de Fischbein corroboram com as discussões relacionadas com o desinteresse dos alunos pela disciplina de Matemática, fato que poderia ser evitado ou pelo menos amenizado se a aprendizagem dos alunos acontecesse de forma mais significativa. Já que um dos fatores de desinteresse pela matemática é por não entendê-la e por seus conceitos não apresentarem significado para os alunos, ou seja, por muitas vezes, não ser considerada como uma atividade humana.

2.2. Quanto maior a quantidade de termos da PG, mais fácil será a verificação da tendência desta sequência?

Como sistematização das atividades desenvolvidas com os alunos do segundo ano da referida escola estadual pública Militar, a professora/pesquisadora encaminhou aos mesmos uma questão descritiva (parte de uma das avaliações trimestrais), a qual além de avaliar a aprendizagem dos alunos, serviu também para analisar a potencialidade das atividades realizadas e os sentidos produzidos pelos alunos. Neste momento, foi possível verificar o quanto significativa foi a aprendizagem dos alunos, uma vez que eles responderam (e foram avaliados) considerando noções intuitivas e expressaram aquilo que de fato fez sentido para eles.

No quadro abaixo, segue a questão encaminhada aos alunos:

Quadro 1: Questão avaliativa encaminhada aos alunos.

Uma sequência qualquer é caracterizada por apresentar um padrão que se repete ao longo de sua construção. No caso das sequências numéricas, tomamos como estudo, duas delas, de forma especial, a Progressão Aritmética e a Progressão Geométrica. Nesse sentido, vimos que o crescimento de uma PA infinita é dado de forma linear e, portanto, os valores desta sequência tenderão ao infinito positivo ou negativo, não havendo uma tendência para um valor especial. Já na PG infinita, quando sua razão (q) possuir um valor entre -1 e 1 $(-1 < q < 1)$, *os valores desta sequência tenderão para zero e a soma dos valores da sequência tenderá para um único valor. Ou seja, quanto maior a quantidade de termos considerados, será mais fácil de verificar esta tendência. Explique por que isso acontece.*

Fonte: Planejamento, Silva, 2014.

É importante ressaltar que existem diferentes tipos de avaliações e diferentes níveis de rigores no processo avaliativo e cabe a nós, professores de matemática, compreender qual nível de rigor é conveniente atingir em cada etapa do processo de ensino e de aprendizagem, como também, em cada avaliação “[...] sem que, com isso, percamos o sentido e a real compreensão das ideias matemáticas. Para isso, devemos levar em consideração, fundamentalmente, o perfil do nosso estudante no que se refere à sua formação matemática anterior” (REIS, 2009, p. 91). É preciso, portanto, encontrar um ponto de equilíbrio entre a intuição e o rigor no processo avaliativo, e, da mesma forma, nos encaminhamentos das atividades e na gestão das aulas.

A partir deste questionamento, foi possível verificar, nas respostas, que a maioria dos alunos compreendeu o conceito considerando ideias intuitivas de limite através da ideia da tendência e aproximação de valores. Fato que pode ser explicitado nas respostas de quatro alunos (A5, A12, A26, A38 e A46), as quais mais se destacaram, devido a sua complexidade, por apresentarem as ideias com clareza e as respostas completas, apesar de alguns não se deterem a explicar porque quanto maior a quantidade de termos ficará mais fácil analisar essa tendência, mas que demonstraram entendimento do conceito.

Isso acontece porque o crescimento de uma PG infinita não é dado de forma linear, portanto, os valores desta sequência tenderão para zero e a Sn tenderá para um único valor. Se f(n)= $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *,* $-1 < q < 1 \lim_{n\to\infty} Sn$*, ou seja, Sn = 0,499998, a soma tende a 0,5 e quanto mais alto o valor de n, mais perto de 0,5 a soma fica. (A5, SILVA, 2014).*

Isso acontece, pois qualquer valor MULTIPLICADO (PG) por um número entre 0 e 1 (positivo ou negativo) resultará em um valor com módulo menor que o inicial. E assim por diante, exemplo: 3; 2,8; 2,5; 2; 1,1; 0,9; 0,6; 0,4; 0,13; 0,001... (A12, SILVA, 2014).

Isso acontece na PG, pois com um valor entre -1 e 1, ao ser multiplicado por qualquer número fará com que ele se aproxime de 0 cada vez que multiplicado por ele. Ex: $q = 1/2$ *e* $a_1 = 2$, $a_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ *e* $a_3 = 1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$ *...*

E a soma dos valores da PG ∞ tenderá a um único valor, pois os valores ficaram cada vez mais próximos de zero, aumentando muito pouco o resultado da soma. Ex: $S_n = 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 3{,}75$*(tende ao 4). (A26, SILVA, 2014).*

Isso acontece porque se a razão está entre -1 e 1 (0,5 por exemplo), os números da sequência sempre serão multiplicados por 0,5, assim tendendo a zero.

Ex: $2 \times 0{,}5 = 1$

$1 \times 0{,}5 = 0{,}5$

$0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

$0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}125$

Tende a zero, mas nunca chega nele (exponencial). E quanto mais termos analisarmos, mais perceptível isso ficará. O mesmo se aplica à razão negativa, como -0,5. (A38, SILVA, 2014).

Na PG, se $-1 < q < 1$*, o valor de 'q' vai ser muito pequeno e assim, cada vez, chegará mais próximo do número ZERO, mas não chegando de fato nele. Ao somarmos os valores da sequência, podemos perceber que cada vez, vai aumentar um pouquinho o valor, e tenderá a chegar à um valor determinado, mas não chegará. (A46, SILVA, 2014).*

As análises indicam que a noção intuitiva do limite aplicada à construção de uma Progressão Geométrica e à soma de seus termos, teve sentido e significado para este grupo de educandos, uma vez que eles compreenderam a ideia fundamental de limite, sem calculá-lo direta e mecanicamente. Apesar de que o processo da construção e aquisição do conceito de limite, de acordo com Barroso et al (2009), gera muitas dificuldades, seja ele a partir de uma linguagem formal ou a partir da linguagem natural. Os autores ainda afirmam que:

> [...] para ensinar este conceito, não se pode abdicar nem da linguagem natural nem da linguagem formal. A maior dificuldade, contudo, está na existência de um grande abismo entre elas, fazendo-se necessária e fundamental a elaboração de uma conexão lógica (BARROSO et al, 2009, p. 104).

Caraça (1951) define Limite da seguinte forma: *"Diz-se que a sucessão numerável* a_n *tem por limite o número L, quando* n *tende para infinito, e escreve-se* $lim_{n \to \infty} a_n = L$ *quando a diferença* $a_n - L$ *é infinitésima com* $\frac{1}{n}$*".*

Dessa forma, analisando as respostas dos alunos (material empírico), quando afirmam que *os valores desta sequência tenderão para zero e a Sn tenderá para um único valor.* Completando ainda que para *f(n)* = $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, quando $-1 < q < 1$ existe $\lim_{n \to \infty}$ *Sn, ou seja, Sn=0,499998, a soma tende a 0,5 e quanto mais alto o valor de n, mais perto de 0,5 a soma fica.* Percebe-se pontualmente, a presença da noção de limite, e, além disso, também é possível perceber que esta noção vai ao encontro da definição de limite apresentado por Caraça (1951), só que neste caso, na forma da noção intuitiva.

Isso também fica evidente, quando se menciona que *isso acontece, pois qualquer valor MULTIPLICADO (PG)* (percebe-se a noção básica da Progressão Geométrica) *por um número entre 0 e 1 (positivo ou negativo) resultará em um valor com módulo menor que o inicial.* Exemplificando ainda, sua ideia, através de uma sequência de números aleatórios decrescentes: *Ex: 3; 2,8 2,5; 2; 1,1; 0,9; 0,6; 0,4; 0,13; 0,001...*

No entanto, alguns alunos não apresentam respostas satisfatórias conforme o esperado, o que pode ser observado nas seguintes afirmações dos alunos A23, A35 e A44, as quais apresentam respostas não muito claras, incompletas ou com alguns equívocos nos conceitos/noções de limite (conforme segue abaixo), e ainda, houve dois alunos que não responderam a questão solicitada.

Pois a soma dos elementos, tanto finais, como iniciais da PG resultarão em um número próximo à 0, visto que a razão não é um número inteiro, normalmente, por exemplo (0,25). Com essa multiplicação em sequência os números buscam um único referencial, no caso o 0. (A23, SILVA, 2014).

A PA é uma função linear e seu gráfico é representado por uma reta. A PG é uma função exponencial. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ *. (A35, SILVA, 2014).*

Pois a PA é uma sequência de termos, que a partir do segundo somam-se com uma razão r*. Pois a PG é uma sequência de termos, que a partir do segundo multiplica-se com uma razão* q*. (A44, SILVA, 2014).*

As análises destes registros dos alunos, indicam que, para eles, a noção de limite não ficou clara, que os sentidos produzidos poderiam se aproximar mais da significação dos referidos conceitos, ou ainda, pode-se conjecturar que este, não tenha entendido o que a pesquisadora pedia na questão. Uma vez que, dificilmente o professor consegue atingir a totalidade da turma, pois os sujeitos envolvidos possuem diferentes características, as quais precisam sempre ser levadas em consideração. Entretanto, por maior que seja o empenho do professor, esta não é uma tarefa fácil de ser atingida.

Nesse sentido, ao registrar que *a soma dos elementos, tanto finais, como iniciais da PG resultarão em um número próximo à 0,* fica evidente que para este aluno não ficou clara a noção da tendência dos valores da sequência infinita, conforme aumenta-se seu número de termos, assim como a tendência da soma dos termos da PG. Embora, pode-se perceber também, que sua ideia não está totalmente fora do contexto, pois a análise feita por este aluno pode ser com relação à parte da sequência e não a sequência como um todo, entretanto, é importante ressaltar que trata-se, neste caso, de uma Progressão Geométrica infinita, e dessa forma, não possuí *elementos finais,* como relata o alunos A23, visto que não possuí fim. No entanto, seus valores aproximam-se do zero e sua soma tende para um único valor.

Já o aluno que registrou a seguinte afirmação: *A PA é uma função linear e seu gráfico é representado por uma reta. A PG é uma função exponencial.* $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, e o aluno que registrou: *Pois a PA é uma sequência de termos, que a partir do segundo somam-se com uma razão* r. *Pois a PG é uma sequência de termos, que a partir do segundo multiplica-se com uma razão* q, de forma nenhuma, pode-se dizer que suas respostas estão incorretas, pois de fato, isto acontece. No entanto, estas não são respostas coerentes com a pergunta feita pela professora/pesquisadora, e sim, aquilo que para esses alunos ficou claro, embora não fosse este, o principal objetivo que as atividades contemplavam.

A análise das diferentes situações consideradas nesta pesquisa indica, ainda, que é preciso, nos cursos de formação de professores, chamar a atenção dos licenciandos para a essência das ideias e dos conceitos matemáticos. De acordo com Onuchic e Huanca (2013, p. 321), os educadores matemáticos dos cursos de licenciatura em matemática são responsáveis "[...] pela compreensão e pelo significado de diferentes conceitos, conteúdos e técnicas operatórias constantes nos tópicos trabalhados no ensino fundamental e médio", e, responsáveis também, por repassar esses conhecimentos aos seus alunos. Já que desta forma, os futuros professores seriam capazes de responder aos alunos da educação básica, quando questionados sobre o "Por que é necessário eu ter que aprender essa matemática?".

Considerações Finais

O conceito de limite, sobretudo, é responsável pela abrangência e significado de muitos tópicos da educação básica, como por exemplo,

> - Pelo conhecimento e pela identificação das geratrizes das dízimas periódicas simples e compostas, dadas por números racionais. Exemplo: 0,999... = 1;
> - Nas progressões geométricas quando se busca a soma de seus termos $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ e, ainda, nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, ver-se que a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$;

- Quando se construírem gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, falar-se sobre limites de a^x quando x tende para $(+\infty)$ ou $(-\infty)$. (ONUCHIC, HUANCA, 2013, p. 321).

Baseado nas colocações de Onuchic e Huanca e a partir das análises, entende-se que o ensino de Cálculo, se trabalhado a partir destes entendimentos, ao invés de ser muito difícil, pode tornar-se gratificante por apresentar novas ideias e pela ampla abrangência que possuí. É preciso, entretanto, de uma nova estruturação no currículo do ensino médio, para que a inclusão do Cálculo torne-se viável.

Uma vez que, se considerarem-se as noções do Cálculo, sobretudo, o ensino de Limite, na educação básica a partir dos tópicos propostos por estes mesmos autores, torna-se possível formar alunos do ensino médio capazes de estabelecer relações matemáticas com o infinitésimo na busca de soluções de problemas modelados. Além disso, acredita-se que, através destes encaminhamentos, seja possível trabalhar tópicos do Cálculo, viabilizando também, uma posterior definição formal.

Nesse sentido, entende-se, a partir das análises, que as ideias de limite produzidas pelos alunos do ensino médio, através do desenvolvimento das atividades relacionadas ao conceito de Progressão Geométrica, caracterizam-se por noções intuitivas estabelecidas pela relação da PG infinita com o infinitésimo dito no estudo de limite, através da tendência do número de termos da sequência ao infinito e a convergência de seus valores para zero, conforme se aumenta o número de termos da sequência, quando a razão q da PG encontra-se entre -1 e 1 (PG decrescente).

Com relação à soma dos termos da PG infinita, ou seja, a Série relacionada à Sequência, as análises apontam que a convergência desta soma para um único valor dá-se através da noção de limite, tendência e aproximação de valores, o que pontua profundamente a ideia e a noção intuitiva de limite, estabelecidas para esse nível básico de ensino.

E, portanto, acredita-se que, neste movimento, seja possível apresentar aos alunos do ensino médio as noções básicas do Cálculo de maneira intuitiva, articulando estes conceitos com alguns tópicos do ensino médio, no momento em que estes forem trabalhados, ressaltando ainda, a importância de relacionar os diferentes registros de representação, de tal forma que possibilite a produção de sentidos e a negociação de significados, ampliando assim, a capacidade de resolução de problemas que envolvam os referidos conceitos.

Referências Bibliográficas

BARROSO, Natália Maria Cordeiro. SOARES, José Marques. MOTA, João César Moura. NETO, Hermínio Borges. **Limite: definição intuitiva versus definição formal.** In: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian. Educação matemática no ensino superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. (Coleção SBEM, v. 5).

BRASIL. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias/Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

BUSSE, Ronaldo da Silva. SOARES, Flávia dos Santos. **O cálculo diferencial e integral e o ensino médio**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Minas Gerais. Anais eletrônicos Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa. Belo horizonte - MG: UNI-BH, 2007. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html. Acesso em: dez. 2014,

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 166 f. Lisboa, 1951.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. **Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais.** PUC – São Paulo. In: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian. Educação matemática no ensino superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. (Coleção SBEM, v. 5).

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua.** 1947. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1990. (Coleção educação contemporânea; 59).

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. 29. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010. (Coleção temas sociais).

OLIVEIRA, Fernando Rodrigues. **Uma proposta para o ensino de noções de cálculo no ensino médio**. 2010. 58 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciado em Matemática) – Curso de Matemática, Universidade Federal do rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2010.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. HUANCA, Roger. **A Licenciatura em Matemática: o desenvolvimento profissional dos formadores de professores**. In: FROTA, Maria Clara Rezende; CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci; BIANCHINI, Barbara Lutaif. Marcas da educação matemática no ensino superior. Campinas, SP: Papirus, 2013. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

REIS, Frederico da Silva. **Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise.** UFOP – Ouro Preto. In: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian. Educação matemática no ensino superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. (Coleção SBEM, v. 5).

RIO GRANDE DO SUL, Secretaria de Estado da Educação. **Referencias Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul: Matemática e suas Tecnologias**. Secretaria de Estado da Educação, Departamento Pedagógico: Porto Alegre, RS: SE/DP, 2010.