

PARALELISMO: QUE SIGNIFICADOS SÃO PRODUZIDOS POR UM GRUPO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA?¹

Francieli Cristina Welter²

Resumo: O presente artigo se constituiu a partir de uma pesquisa qualitativa com abordagens quantitativas e tem como objetivo elucidar os significados produzidos por licenciandos de um curso de matemática a partir do desenvolvimento de situações-problema relacionados ao conceito de paralelismo, considerando elementos da teoria dos registros de representação semiótica. Os dados empíricos foram produzidos a partir de um instrumento de avaliação composto por 15 questões/situações-problema, destas foram consideradas para análise três, as quais envolveram o conceito de retas paralelas. Este instrumento de avaliação foi desenvolvido por alunos que cursavam uma disciplina, que considera conceitos da geometria plana, de um curso de licenciatura em Matemática. Os dados foram organizados em um quadro e analisados conforme três unidades de análise: retas paralelas e a circunferência, retas paralelas e ângulos e retas paralelas e o 5º postulado de Euclides. As análises basearam-se, especialmente, nas ideias de Soares (2007); Brasil (1998, 2006); Moretti (2002); Palles e Silva (s/d), Machado (1990) e Caraça (2002). A pesquisa indica que, no que tange ao paralelismo de retas com relação à circunferência, os alunos utilizaram, especialmente, a conversão entre a língua natural e o registro figural, sendo que a partir destas apresentaram argumentos para responder a situação-problema. Ao relacionar a ideia de retas paralelas com ângulos obtidos a partir de retas paralelas e uma transversal, a maioria dos alunos realizou tratamentos considerando a representação algébrica. Ao tratar do paralelismo com relação ao 5º Postulado de Euclides, os alunos elaboraram vários significados, dentre eles ganha destaque, a importância das discussões acerca do mesmo terem gerado a criação das geometrias não euclidianas.

Palavras-chave: registros de representação semiótica; retas paralelas; significados produzidos por licenciandos;

Introdução

O presente artigo constitui-se a partir de uma pesquisa que trata da significação de conceitos da geometria plana, considerando os registros de representação. A Geometria pode ser tratada como um campo da matemática que auxilia os alunos no que trata do pensamento matemático e do raciocínio, buscando relacionar o espaço onde se vive com os conceitos matemáticos. A aprendizagem de conceitos deste campo da matemática pode contribuir na formação dos educandos de várias maneiras, possibilitando o desenvolvimento da capacidade de solucionar problemas do cotidiano, além da compreensão de teoremas, argumentações dedutivas e grandezas geométricas (BRASIL, 1998). Elementos da teoria dos registros de representação semiótica se relacionam com a geometria plana, no sentido de auxiliar os alunos a construir o

¹ Texto elaborado para o Componente Curricular Estágio Curricular Supervisionado: trabalho de sistematização do curso em Matemática, sob orientação da professora Ma Isabel Koltermann Battisti.

² Graduanda do Curso de Matemática – Licenciatura da UNIJUI – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.

referido conhecimento através de relações entre os objetos matemáticos e suas diferentes representações (SOARES, 2007).

A apropriação dos conceitos da matemática considerando-se os registros de representação não ocorre tranquilamente por parte dos alunos, há a necessidade de realizarem-se conversões e tratamentos entre estes registros para que, desta maneira, consigam pensar em um mesmo objeto matemático através de diferentes representações.

Várias pesquisas tratam dos registros de representação semiótica, fundamentadas, especialmente, em Duval, dentre estas destacam-se Soares (2007), Moretti (2002), Palles e Silva (s/d) e Machado (1990). Duval (2012) em suas proposições salienta a forte ligação entre semiose e noesis no funcionamento cognitivo do pensamento e explicita que a semiose é apreensão ou produção de uma representação semiótica, enquanto a noesis é apreensão conceitual de um objeto, ambas são inseparáveis, mas não devem ser confundidas como uma só. O referido autor apresenta diferentes considerações, das quais, neste momento, destaco: as representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática; os registros de representação semiótica podem se fazer a partir de registro figural, de registros numérico, em língua natural ou na representação algébrica; tratamentos e conversões são operações independentes um do outro e relevantes no processo de aprendizagem; a importância de objetos matemáticos não serem confundidos com sua representação; diversas representações semióticas de um mesmo objeto matemático, pois cada representação leva em conta diferentes aspectos, sendo que é necessário que o aluno mobilize ao menos dois registros para desenvolver aprendizagem.

Soares (2007) procura responder a seguinte questão: o planejamento, elaborado pela professora, para ensinar o conceito de número racional potencializa a mobilização de vários registros de representação semiótica, bem como a coordenação entre eles? Dentre os resultados obtidos a pesquisadora aponta que o planejamento analisado mobiliza todos os registros de representação semiótica, porém em algumas séries não há mobilização de todos os registros e nas séries que isso ocorre, alguns têm mais ênfase que outros, o que segundo a mesma demonstra que o planejamento elaborado pela professora tem caráter linear. Soares (2007) aponta em sua pesquisa que alguns alunos confundiram o objeto com sua representação, a pesquisadora também observou que no planejamento analisado haviam poucas atividades que envolveram mais de dois registros de representação, a maioria só tratava de dois registros, percebeu também que a conversão entre os registros não é prioridade, há tendência em utilizar regras que estão na língua natural, sem participação dos alunos, bem como resolver atividades utilizando procedimentos e algoritmos, além disso, os alunos não trabalharam com o desenvolvimento das regras utilizadas para a resolução das atividades.

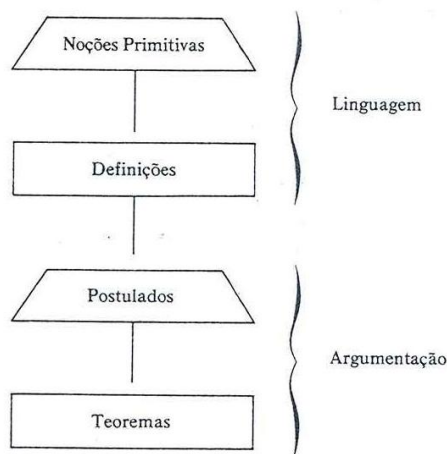
Moretti (2002) apresenta uma pesquisa que considera a teoria dos registros de representação, a qual se estrutura a partir da seguinte questão: para um determinado conceito em matemática, existe uma boa representação que leve de forma suficiente à sua compreensão? Como resultado Moretti indica que quando tratamos de um

determinado problema, utilizando o mesmo objeto matemático, porém com diferentes representações, os alunos têm dificuldades de relacionar suas semelhanças, onde o problema considerado mais congruente (onde foram utilizados paralelogramos) é resolvido com facilidade, enquanto o outro gera uma enorme dificuldade de resolução, devido às diferentes maneiras de compreender o problema. É importante destacar-se que tanto Soares quanto Moretti fundamentam suas pesquisas nos estudos desenvolvidos por Raymond Duval.

Palles e Silva (s/d) tratam da geometria que é ensinada nas escolas, mostram a importância da visualização no que se refere à geometria, pois a mesma deveria ser tida como um conteúdo de extrema valia, tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio, precisa-se destacar que sua importância estende-se em vários campos, não restringindo-se à matemática, pois a geometria auxilia os alunos a desenvolverem o raciocínio lógico-dedutivo e as percepções espaciais e visuais. No decorrer do artigo os autores procuram responder à seguinte questão: como se constitui o processo de visualização de figuras dinâmicas? Os resultados obtidos mostram que esse processo depende das representações semióticas produzidas pelos alunos, sendo que as figuras geométricas devem ser de fato construídas, independentemente do instrumento utilizado para isso, depois da construção, é necessário que o aluno analise a representação figural e encontre elementos que sejam significativos para seu aprendizado, essa análise não ocorre tranquilamente, e, na maioria das vezes, é feita de maneira errônea pelos mesmos, então apesar de elaborarem uma imagem mental correta da figura, a mesma é incompleta, pois a figura é compreendida como sendo o conceito matemático, o que não é verídico.

Machado (1990) por sua vez, apresenta tratativas da geometria considerando a gênese destes conhecimentos e explicita a importância da sua compreensão pelos estudantes. Mostra que a Geometria tem início com as noções primitivas e intuitivas e que a partir destas surgiram as definições e posteriormente, com Euclides, os postulados e os teoremas, esta relação está descrita em um diagrama, apresentado na Figura 1.

Figura 1: Diagrama representando a estruturação da Geometria proposta por Euclides.



No decorrer de suas proposições Machado (1990) discute processos de ensino e de aprendizagem em geometria e, para tanto, apresenta o chamado tetraedro epistemológico, que considera quatro faces: Percepção, Construção, Representação e Concepção. O referido autor afirma que é a partir destas quatro faces que consegue-se compreender a geometria em seus significados e funções.

Considerando os registros de representação semiótica e os conceitos de geometria, percebe-se que ambos devem ser levados em consideração nos cursos de formação do professor de matemática, pois para que o futuro professor compreenda as dificuldades que seus alunos têm ao estudarem a geometria, é necessário que entendam o papel dos registros de representação semiótica no aprendizado dos seus alunos, para que desta forma os mesmos consigam estabelecer relações entre os registros de representação e a geometria. Por isto, os cursos de formação do professor de matemática devem levar em consideração, aspectos da geometria relacionados aos registros de representação semiótica para que desta forma, os licenciandos compreendam não somente os conceitos de geometria, mas também os meios que os alunos precisam dispor para que isto ocorra.

Mediante estas breves considerações percebe-se que é imprescindível que a teoria dos registros de representação seja considerada no processo de ensino e de aprendizagem dos licenciandos em matemática, sendo que ao tratarem de conceitos de geometria plana, é necessário que consigam mobilizar diferentes registros de representação. Neste contexto, surge o interesse em investigar: *quais os significados produzidos por licenciandos de um curso de matemática no desenvolvimento de situações-problemas que envolvem conceitos de geometria plana, mais especificamente aos relacionados ao paralelismo?*

1. Procedimentos metodológicos

A pesquisa que fundamenta o presente artigo está baseada em uma abordagem qualitativa, mas que considera tratamentos quantitativos. De acordo com Godoy,

Em linhas gerais, num estudo quantitativo o pesquisador conduz seu trabalho a partir de um plano estabelecido *a priori*, com hipóteses claramente especificadas e variáveis operacionalmente definidas. Preocupa-se com a medição objetiva e a quantificação dos resultados. Busca a precisão evitando distorções na etapa de análise e interpretação dos dados, garantindo assim uma margem de segurança em relação às inferências obtidas.

De maneira diversa, a pesquisa qualitativa não procura enumerar e/ou medir os eventos, nem emprega instrumental estatístico na análise dos dados. Parte de questões ou focos de interesses amplos, que vão se definindo à medida que o estudo se desenvolve. Envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo. (GODOY, 1995, p.58)

Percebe-se que existem diferenças bastante perceptíveis entre os dois tipos de pesquisa, sendo que a quantitativa preocupa-se basicamente com a qualidade, quantidade e objetividade dos dados empíricos e repassa grande confiabilidade. Enquanto a qualitativa, parte de questões mais amplas, que vão sendo afinadas aos poucos durante o desenvolvimento da pesquisa em questão, buscando analisar os dados através de perspectivas que variam de acordo com a intencionalidade da pesquisa.

Para que ocorra o desenvolvimento da pesquisa foram necessários alguns procedimentos. Em um primeiro momento realizou-se um estudo dos pressupostos teóricos que fundamentam as análises da pesquisa, mais especificamente elementos relacionados a conceitos da geometria plana, de forma especial o de paralelismo, e dos registros de representação semiótica.

Esta importante etapa da pesquisa que considerou a compreensão dos fundamentos teóricos aconteceu concomitante a outros procedimentos, entre os quais destacam-se: o levantamento de disciplinas propostas num curso de licenciatura em Matemática, identificação de disciplinas que consideram conceitos da geometria plana, definição de uma das referidas disciplinas³, identificação da professora ministrante da disciplina selecionada, entrevista semiestruturada com a professora da mencionada disciplina. Neste momento tornou-se possível conhecer a ementa, os objetivos, o currículo programático e a metodologia proposta na disciplina. A partir disso, definiram-se procedimentos para a produção de dados empíricos. No decorrer da entrevista acordou-se ainda, que a forma de produção dos dados empíricos para a pesquisa se daria a partir de encaminhamentos de situações-problema. Analisando-se o plano de ensino da disciplina, tornou-se possível observar que os conceitos considerados nas situações-problema foram trabalhados pela professora regente na disciplina, também se observou que a mesma tem como bibliografia básica, os estudos realizados por Dolce e Pompeo (1985) e Fossa (2011).

Assim, um instrumento de avaliação foi considerado como meio para produzir os dados, sendo que o mesmo era composto por 15 questões/situações-problema, todas envolvendo conceitos de geometria plana. Salienta-se que a turma de licenciandos da disciplina considerada na pesquisa é composta por treze alunos, sendo que os mesmos foram convidados a participar da pesquisa, destes, somente onze autorizaram o uso do material.

Analisando o instrumento de avaliação optou-se em selecionar questões que de diferentes formas relacionam-se ao conceito de paralelismo. A partir dos objetivos da pesquisa, do referencial teórico, do material empírico e do próprio limite da pesquisa, optou-se, assim, em considerar no instrumento de avaliação três questões/situações-problema para a constituição do banco de dados empíricos.

³Foi assim definida para a produção dos dados empíricos da pesquisa a disciplina de um curso de Matemática – Licenciatura, de uma Universidade do interior do Rio Grande do Sul. Esta disciplina compõe o bloco das Práticas de Ensino e é denominada de Prática de ensino: Geometria.

Dentre as situações-problema selecionadas, a questão 13, está representada na Figura 2.

Figura 2: Questão 13, proposta aos alunos no instrumento de avaliação considerado.

13. Usando instrumentos de desenho desenvolva os seguintes procedimentos:

1. Trace uma reta qualquer e nomeie-a de r ;
2. Marque um ponto qualquer \notin a reta r e nomeie-o de C.
3. Usando o compasso. Com centro (ponta seca) no ponto C trace um arco que passe pela reta r . O ponto de intersecção entre o arco e a reta r nomeie de ponto E.
4. Com a mesma abertura do compasso, coloque o centro no ponto E e trace um outro arco passando pela reta r . Este ponto de intersecção entre a reta r e este novo arco nomeie de F.
5. Defina a abertura do compasso com a mesma medida do segmento \overline{FC} . Coloque a ponta seca do compasso no ponto E e trace um arco de tal forma que tenha um ponto de intersecção entre os dois arcos traçados. A este ponto chame de D.
6. Trace uma reta que passe pelos pontos C e D. Nomeie esta reta de s .

Questões:

a) Observe as retas r e s . O que é possível afirmar?

b) Analise os procedimentos desenvolvidos e justifique/argumente sobre o que garante o paralelismo entre as retas s e r .

Fonte: dados empíricos produzidos na pesquisa. (WELTER, 2014).

A Figura 3 apresenta a questão 14.

Figura 3: Questão 14, proposta aos alunos no instrumento de avaliação considerado.

14. Na figura, as retas a e b são paralelas. Calcule o valor de x .

a)

The figure shows two separate diagrams, each with two horizontal parallel lines labeled a and b , and a transversal line labeled t intersecting them.

In the left diagram, the transversal t slopes downwards from left to right. At the intersection with line a , the acute angle in the bottom-right position is labeled $2x + 15^\circ$. At the intersection with line b , the obtuse angle in the top-right position is labeled $30^\circ - x$.

In the right diagram, the transversal t slopes upwards from left to right. At the intersection with line a , the acute angle in the top-left position is labeled 50° . At the intersection with line b , the obtuse angle in the bottom-left position is labeled $4x + 70^\circ$.

Fonte: dados empíricos produzidos na pesquisa. (WELTER, 2014).

A questão 15 é apresentada pela Figura 4.

Figura 4: Questão 15, proposta aos alunos no instrumento de avaliação considerado.

15. O quinto postulado, também chamado de postulado das paralelas, proposto por Euclides, na obra Os Elementos, foi o ponto culminante do surgimento das Geometrias Não Euclidianas. Comente, explicitamente alguns argumentos.

Postulado 5 (Euclides). Se duas retas são interceptadas por uma transversal de modo que a soma de dois ângulos interiores (internos) de um dos lados da transversal seja menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas se cruzam naquele lado da transversal.

Fonte: dados empíricos produzidos na pesquisa. (WELTER, 2014).

As respostas dos alunos⁴ às referidas questões foram organizadas em um quadro, visando-se uma melhor visualização dos registros semióticos e dos entendimentos/significados produzidos pelos mesmos no desenvolvimento das situações-problema consideradas na pesquisa. Este quadro constituiu o banco de dados empíricos da pesquisa. Com o intuito de preservar-se a identidade dos alunos, tanto no quadro elaborado, quanto neste texto, os alunos são indicados como: Aluno 1, Aluno 2, Aluno 3, Aluno 4, Aluno 5, Aluno 6, Aluno 7, Aluno 8, Aluno 9, Aluno 10 e Aluno 11.

As análises dos dados produzidos na pesquisa fundamentaram-se, especialmente, em: Duval (2012); Soares (2007); Brasil (1998, 2006); Moretti (2002); Palles e Silva (s/d); Machado (1990), Caraça (2002) e Godoy (1995). Estas foram delimitadas a partir de três unidades, as quais têm como foco principal o conceito de paralelismo a partir de retas, porém cada uma considera aspectos diferentes. A primeira considera a circunferência na representação de retas paralelas, a segunda aborda a medida de ângulos obtidos a partir do traçado de uma reta transversal em duas retas paralelas, enquanto que a terceira trata especialmente do 5º Postulado de Euclides, levando em consideração a medida de ângulos obtidos a partir do traçado de uma reta transversal em duas retas paralelas.

2 Paralelismo: um conceito a ser significado pelos licenciandos

A disciplina considerada na pesquisa, de acordo com o Plano de ensino disponibilizado pela professora regente, é denominada Prática de ensino: geometria, tem como um dos focos conceitos da geometria plana, considera como metodologia de ensino a resolução de problemas e a investigação matemática, e como recurso didático cita o uso de tecnologias da informação e da comunicação. A referida disciplina visa possibilitar aos licenciandos a apropriação de subsídios relacionados ao processo de ensino e de aprendizagem de conceitos constitutivos do currículo de matemática da educação básica, de forma especial aos relacionados à geometria plana. Apresenta vários objetivos específicos, alguns destes relacionados ao uso de formas e propriedades geométricas na compreensão e resolução de situações-problema, à apropriação da significação de conceitos geométricos e ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

No decorrer do semestre, de acordo com informações dadas pela professora regente da disciplina na entrevista, foi proposto aos licenciandos, dentre outros, o estudo do conceito de paralelismo. O referido conceito tem um papel importante na geometria, e pode analisar-se sob várias abordagens. Nesta pesquisa o referido conceito será abordado considerando-se um espaço bidimensional, tratando-se de forma especial a relação estabelecida a partir de retas.

⁴ Que autorizaram a participação na pesquisa.

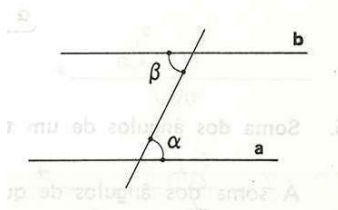
Para que os alunos consigam compreender o conceito de retas paralelas é necessário que estabeleçam relações com outros conceitos da geometria plana, dentre os conceitos geométricos imprescindíveis para o estabelecimento destas relações evidenciam-se: retas concorrentes, coplanares, transversais, além de entenderem da congruência de ângulos, tanto alternos quanto externos.

É importante destacar, neste momento, que, de acordo com Dolce e Pompeo (1985, p.56), “Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) *congruentes*, então essas duas retas são paralelas”.

Baseados nesta definição os referidos autores apresentam uma condição indicada de necessária e suficiente para que existam retas paralelas, é a seguinte “Uma condição necessária e suficiente para duas retas distintas serem paralelas é formarem com uma transversal ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes” (DOLCE e POMPEO, 1985, p. 57).

A condição necessária e suficiente proposta por Dolce e Pompeo (1985) pode ser tomada como ponto primordial em se tratando da significação do conceito de paralelismo. Este entendimento possibilita o estudo e o estabelecimento de relações com outros conceitos da geometria plana.

Figura 5: Condição necessária e suficiente para a existência do paralelismo.



Fonte: Dolce e Pompeo, 1985, p.57

A partir do entendimento do que garante o paralelismo entre retas, há possibilidades de se analisar de maneira mais eficaz o material empírico produzido, cujos conceitos envolvidos determinaram as três unidades de análise, como já dito anteriormente: retas paralelas e a circunferência; retas paralelas e ângulos e retas paralelas e o 5º Postulado de Euclides.

Quanto ao instrumento de avaliação selecionado para a pesquisa, a professora colocou uma observação antes do desenvolvimento das situações-problema propostas, recomendando aos alunos que apresentassem todo o desenvolvimento das mesmas e também considerassem nesse desenvolvimento representações algébricas e representações geométricas.

2.1 Retas Paralelas e a circunferência

Nesta unidade de análise, considerou-se, de forma especial, a questão 13. Esta, como já foi explicitado na metodologia, considera a construção de duas retas paralelas, utilizando-se apenas instruções dadas na questão, o uso de material de desenho: régua e

compasso. Para que os alunos conseguissem desenvolver a questão proposta deveriam lembrar e estabelecer relações com alguns conceitos geométricos já vistos por eles anteriormente, tornava-se necessário lembrar conceitos de reta qualquer, ponto pertencente a uma reta, arco, operação (intersecção), segmento de reta, circunferência, além de relações de pertencimento. Além do que a mobilização de diferentes registros de representação semiótica. Neste sentido, Duval destaca:

A natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representa. Esta escolha é feita em função das possibilidades e dos inconvenientes semióticos do registro escolhido. Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama. Isto quer dizer que toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados. (DUVAL, 2012, p.272).

O desenvolvimento da situação-problema apresentada na questão 13, considera esta ideia, pois a partir do registro em língua materna, os deveriam realizar uma transição entre representações, para a partir daí, concluir se a representação figural obtida apresenta retas paralelas e argumentar o que garante neste caso o paralelismo entre ambas.

O que pretende-se é investigar quais significados foram produzidos pelos licenciandos no desenvolvimento das situações-problema propostas, para isso será feita uma descrição mais generalista dos resultados obtidos e em alguns momentos mostrar-se a resposta de determinado aluno, observando de forma mais pontual os significados que este produziu.

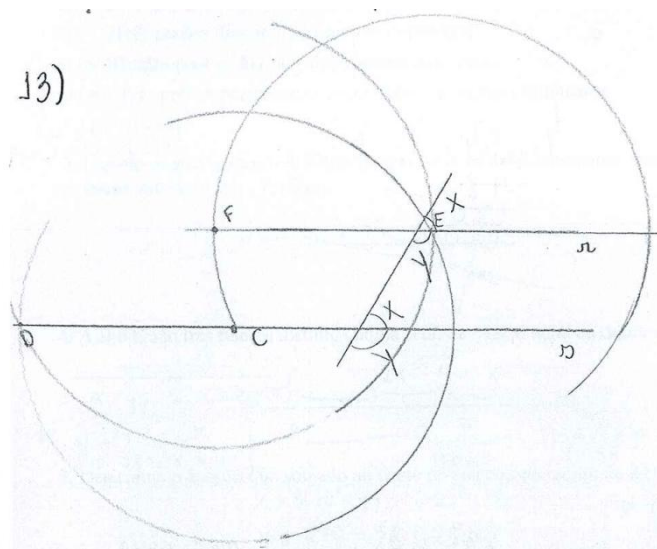
Dentre os onze alunos considerados no desenvolvimento da questão número 13, quatro apresentaram registro figural levando-se em consideração os procedimentos propostos. Os outros sete afirmaram que de fato as retas são paralelas. Do todo, os dados mostram que somente um aluno não apresentou o registro figural e não realizou nem análise, nem síntese, argumentando o que garante o paralelismo entre duas retas quaisquer. Dos que argumentaram sobre o que garante o paralelismo, observaram-se as seguintes respostas: *a distância entre os pontos C e F ser igual à distância entre os pontos D e E* (Aluno 3); *a soma dos ângulos colaterais internos ser igual a 180°* (Aluno 9) e *o raio dos dois arcos ser o mesmo* (Aluno 10).

A análise das respostas dos alunos indica que o Aluno 9 realizou o que foi proposto na situação-problema, sendo que para que isso fosse possível, conjectura-se a necessidade do mesmo relacionar conceitos geométricos já estudados anteriormente com o conceito de paralelismo, pois para desenvolver-se o que está sendo proposto de maneira adequada, é necessário que estabeleça relações entre os conceitos geométricos. Como pode-se observar, o aluno em questão após ter elaborado o registro figural envolvendo as retas, conforme Figura 6, tem uma clara ideia do que garante o paralelismo entre duas retas, pois utiliza-se da ideia de ângulos colaterais para

argumentar que a representação figural se aproxima do que foi proposto, como podemos ver no excerto a seguir:

Elas são paralelas, pois nunca vão se interceptar e também porque se traçarmos uma transversal sobre elas, a soma dos ângulos colaterais internos é igual a 180° . (ALUNO 9, WELTER, 2014)

Figura 6: Registro figural do Aluno 9 sobre a questão 13.



Fonte: dados empíricos produzidos na pesquisa, pelo Aluno 9. (WELTER, 2014).

Analisando-se o registro figural e o registro em língua natural, produzidos pelo Aluno 9, é possível compreender-se que além de conseguir responder satisfatoriamente o que pede-se na questão, o aluno produziu significados importantes para a compreensão do paralelismo com relação à circunferência, e, ainda, é possível conjecturar-se que, para resolver a questão proposta, utilizou-se noções de soma de ângulos, conceitos estes imprescindíveis na significação de retas paralelas na situação-problema proposta.

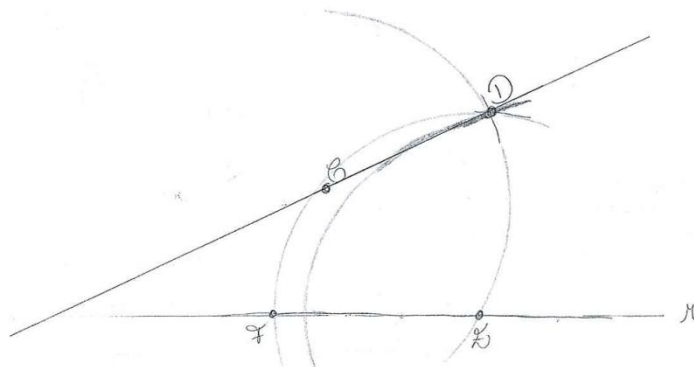
Foi possível observar-se que, com relação aos registros de representação semiótica, o Aluno 9 realizou conversão entre registros, sendo que num primeiro momento, houve a conversão da língua natural para o registro figural, pois o aluno considerado trocou de registro de representação saindo da língua natural, nas quais estão descritas as instruções necessárias à resolução da situação problema, a partir daí estabelecendo relações sobre o conteúdo que está sendo pedido e posteriormente passando a considerar o registro figural. Num segundo momento, a partir da representação figural elaborada, o mesmo apresentou argumentos que respondessem a situação-problema proposta, relacionando-os com os outros conhecimentos de geometria já significados pelo aluno.

A análise da resposta do Aluno 8 por sua vez, como está representado na Figura 7, indica que o mesmo não estabeleceu relações com outros conhecimentos geométricos, que lhe possibilitassem desenvolver a representação figural considerando-

se os encaminhamentos propostos na situação-problema. Observa-se que o Aluno 8, não chegou à representação figural, onde deveriam existir duas retas paralelas, sendo que respondeu que as retas observadas

São transversais e se interceptam em dado momento e o que garante o paralelismo é o 5º Postulado de Euclides (ALUNO 8, WELTER, 2014)

Figura 7: Registro figural do Aluno 8 sobre a questão 13.



Fonte: dados empíricos produzidos na pesquisa, pelo Aluno 8 (WELTER, 2014).

O fato do Aluno 8, não ter elaborado o registro figural conforme foi proposto na situação-problema, possibilita conjecturar-se que esta ação acabou por fazê-lo respondê-la de maneira completamente equivocada. A partir da análise da resposta é possível indicar que as significações produzidas pelo aluno não se aproximam das proposições apresentadas por Dolce e Pompeo (1985) com relação ao conceito de paralelismo entre retas, pois o referido aluno simplesmente disse que o que garantia o paralelismo, que nem existia em seu desenho, era o 5º Postulado de Euclides.

Duval, ao tratar da conversão entre registros, amplia as condições de análise ao afirmar que:

Esta formação implica seleção de relações e de dados no conteúdo a representar. Esta seleção se faz em função de unidades e de regras de formação que são próprias do registro cognitivo no qual a representação é produto. Desta maneira, a formação de uma representação poderia ser comparada a realização de uma tarefa de descrição. Esta formação deve respeitar regras. (DUVAL, 2012, P. 271).

O fato é que, além de não apresentar retas paralelas no registro figural, o Aluno 8 não estabeleceu relações a partir dos encaminhamentos propostos na situação-problema, aparentemente, não conseguiu mobilizar nenhum registro de forma satisfatória visando o desenvolvimento da situação-problema apresentada, pois não foi capaz de produzir uma representação figural. Assim, não considera os elementos necessários à conversão apresentados por Duval (2012).

Dentre os significados produzidos pelos alunos podem-se destacar a importância do raio da circunferência traçada, pois o comprimento do mesmo é igual à medida da distância entre os pontos existentes nas duas retas paralelas, e isso garante o paralelismo entre ambas.

Segundo o Aluno 3,

O que garante o paralelismo é que a distância de C à F é igual a distância de D à E, logo as circunferências consideradas têm o mesmo raio. (ALUNO 3, WELTER, 2014)

O Aluno 5 apresenta um raciocínio semelhante, explicita:

O que garante o paralelismo são os pontos de intersecção a partir dos arcos traçados. As distâncias CF e DE são as mesmas, como CD e FE também são iguais. (ALUNO 5, WELTER, 2014)

Analisando-se a resposta do Aluno 5, percebe-se que o mesmo relatou uma ideia importante ao tentar responder a situação-problema proposta, pois trata das distâncias entre os pontos de intersecção existentes nas duas retas traçadas, isso segundo o Aluno 5 é o que garante o paralelismo. Quanto aos registros de representação apresentados pelo mesmo, observa-se que foi preciso utilizar uma conversão inicial da língua natural para o registro figural, e na sequência levando-se em consideração o que foi desenvolvido pelo mesmo, respondeu o que foi proposto.

Para que fosse possível aos alunos chegarem a esta conclusão, foi necessário o estabelecimento de inúmeras relações entre procedimentos e conceitos. Dentre estas pode-se destacar a construção de retas e pontos utilizando somente o compasso, e os conceitos: reta e ponto qualquer, arco, intersecção, segmento de reta, além da soma dos ângulos colaterais internos.

Duval observa a transição entre os registros de representação semiótica, segundo ele,

A conversão das representações acontece por si mesma desde que haja capacidade de formar representações nos registros diferentes e efetuar tratamentos sobre as representações. (DUVAL, 2012, p.277).

Nesta situação-problema, os alunos precisaram utilizar a conversão entre dois registros, pois os dados e orientações fornecidos estão na língua natural, e uma das necessidades dos alunos foi transformar estes dados em procedimentos que resultassem num registro figural, para isso, foi necessário que estabelecessem diversas relações entre conceitos geométricos, o que os levou à elaboração do registro figural. Após terem conseguido realizar esta conversão, os mesmos utilizaram-se dos dados obtidos para responder a questão proposta. Como já foi dito, alguns alunos não conseguiram realizar a conversão inicial, e por isso, não obtiveram sucesso ao tentar resolver a situação-problema, não elaboraram argumentos acerca do solicitado. Foram sete os alunos que conseguiram realizar a conversão inicial, e somente cinco de forma bastante satisfatória realizaram-na estabelecendo muitas relações ao responder o que foi solicitado na situação-problema.

Percebe-se, assim, que não existe somente uma maneira de garantir o paralelismo entre duas retas, pois quando trabalha-se o registro figural com elementos da circunferência, existem muitas possibilidades de análise e de síntese. Quanto aos

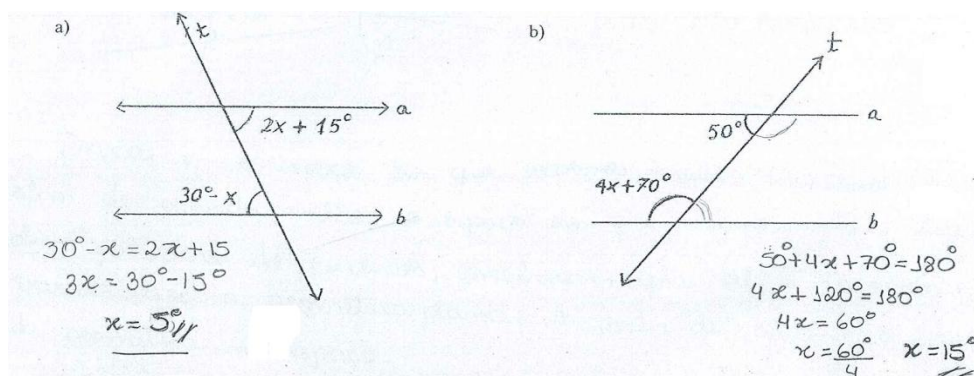
significados produzidos pelos alunos, foram proveitosos, pois a maioria realizou o trabalho proposto, e também justificou o que garante o paralelismo relacionado com a circunferência. Também observa-se que os alunos utilizaram os registros de representação semiótica, sendo que os mesmos estão presentes em todas as etapas de resolução da situação-problema.

2.2 Retas Paralelas e ângulos

Nesta unidade de análise, foi considerada a questão 14. A situação-problema apresentada nesta questão considera dois registros figurais, e conforme já foi dito anteriormente, as mesmas apresentam duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Nela são descritos alguns dados que correspondem as medidas dos ângulos alternos e internos, que formaram-se a partir das retas que estão traçadas no registro figurar. A partir dos dados os alunos deveriam encontrar o valor real da incógnita indicada por “x” e dos ângulos envolvidos na situação, utilizando-se de entendimentos sobre o paralelismo. Nesta situação-problema o aluno deveria estabelecer relações com outros conceitos da geometria, para que conseguisse resolvê-la satisfatoriamente. Dentre os conceitos que deveriam ser relacionados estão: ângulos alternos internos e externos, ângulos colaterais internos e externos, ângulos congruentes, ângulos suplementares e soma de ângulos.

Todos os alunos considerados na pesquisa realizaram o desenvolvimento desta situação-problema. Abaixo está descrita a resposta do Aluno 1, este acertou a resolução da situação-problema, conforme mostra a Figura 8. O Aluno 1, estabeleceu as relações necessárias e mobilizou conhecimentos sobre as propriedades dos ângulos que são imprescindíveis para conseguir resolver o que foi proposto. Apresentou importantes significações sobre o paralelismo relacionadas aos ângulos internos, alternos e correspondentes. Quanto aos registros de representação, neste caso o aluno conseguiu realizar o tratamento necessário ao desenvolvimento da questão proposta; as análises indicam que foi capaz de representar algebricamente, através de uma equação, e desenvolvê-la, realizando um processo de tratamento, segundo Soares (2007, p. 34) “Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo, resolver equações algébricas sem sair do registro algébrico”.

Figura 8: Resolução da questão 14, pelo Aluno 1

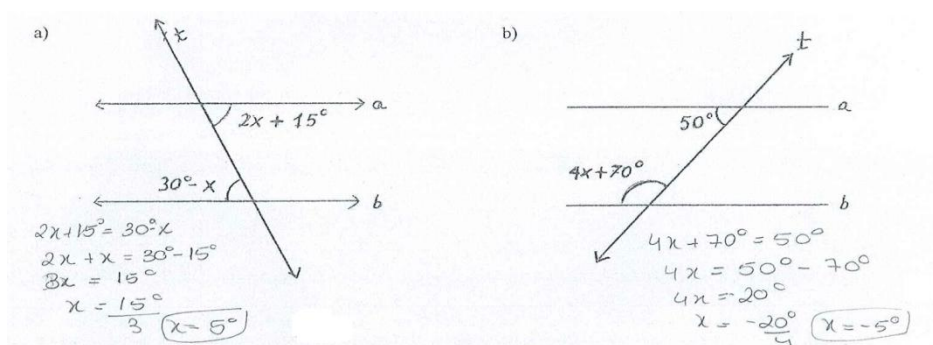


Fonte: dados empíricos produzidos na pesquisa, pelo Aluno 1 (WELTER, 2014).

As análises realizadas indicam que poucos alunos confundiram-se ao tentar resolver as situações-problema propostas, este foi o caso do Aluno 4, conforme mostra a Figura 9, o mesmo resolveu a primeira situação-problema proposta utilizando-se das propriedades dos ângulos alternos internos, produzindo significados sobre esta parte da questão, porém demonstrou dificuldades na outra representação figural, pois confundiu-se, já que na letra a, utiliza-se a ideia dos ângulos correspondentes e na letra b, utiliza-se a ideia dos ângulos suplementares.

O Aluno 4 utilizou estes conceitos de forma que ao desenvolver a equação acabou por gerar como resultado da variável um ângulo negativo. O aluno realizou tratamentos, porém cometeu equívocos ao realizá-lo considerando-se a representação algébrica, o referido equívoco deu-se ao iniciar o tratamento da letra b, o que o fez chegar a uma solução equivocada, pois o que está correto é somente a resolução da equação.

Figura 9: Resolução da questão 14, pelo Aluno 4



Fonte: dados empíricos produzidos na pesquisa, pelo Aluno 4 (WELTER, 2014).

Os ângulos alternos têm grande relação com o paralelismo, pois sabe-se que para que haja a existência da paralela, segundo Dolce e Pompeo (1985 p. 55), “Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) *congruentes*, então essas duas retas são paralelas”. Essa definição é o que embasa a análise anterior, pois o trabalho desenvolvido com este conceito é o que garante de que forma os alunos partem do registro figural proposto na questão, e fazem o tratamento necessário partindo dele para a linguagem algébrica, através da resolução de uma equação.

Isso acaba por gerar indicações sobre que significados foram produzidos pelos alunos na primeira etapa da resolução da situação-problema, percebe-se que estes significados foram superficiais e apesar do Aluno 4 ter realizado as conversões do registro figural para a linguagem algébrica nos dois casos, somente o primeiro tratamento foi realizado de forma satisfatória, porém não foi capaz de realizá-lo na segunda situação proposta.

Levando-se em conta o trabalho desenvolvido por todos os alunos analisados, pode-se perceber que praticamente todos foram capazes de resolver os problemas

propostos. Do todo, foram sete os alunos que resolveram os dois problemas de forma correta utilizando os conceitos de ângulos alternos internos e externos, ângulos colaterais internos e externos, ângulos congruentes, ângulos suplementares e soma de ângulos, de maneira a construir significados produtivos a respeito do trabalho. As análises indicam que os outros quatro apresentaram a mesma dificuldade do Aluno 4, conseguiram resolver o primeiro problema, porém no segundo se confundiram e não puderam resolver a equação de modo a produzir significados importantes ao seu aprendizado.

A partir da situação-problema considerada nesta análise, percebe-se que durante a resolução do mesmo, foram realizados pelos alunos dois tratamentos, ambos relacionados à representação algébrica. Os tratamentos realizados deram-se com base na resolução da representação algébrica/equação, que foram feitas de modo que os alunos conseguissem encontrar o valor pedido na situação problema.

2.3 Retas Paralelas e o 5º Postulado de Euclides

Nesta unidade de análise, o paralelismo entre retas é tratado a partir do 5º Postulado de Euclides, segundo Fossa (2011) este postulado tem o seguinte enunciado

Suponha que uma reta corte duas outras retas de tal maneira que a soma dos ângulos colaterais internos é menor do que dois ângulos retos. Então, se as duas retas estiverem estendidas o suficiente nesse lado, elas se encontrarão. (FOSSA, 2011, p. 141)

Partindo desta definição, os alunos deveriam argumentar por que as discussões acerca do 5º postulado de Euclides geraram a criação de outras geometrias que não as Euclidianas.

Quanto aos postulados, é importante salientar que Euclides, na obra Os Elementos, apresentou cinco. Destes, os primeiros quatro satisfazem a ideia de obviedade, o quinto postulado por outro lado, não é instintivamente óbvio, e acaba necessitando de demonstração, portanto não deve ser considerado um postulado, de acordo com Fossa (2011). Este postulado segundo Fossa (2011) não é considerado óbvio porque trata dos acontecimentos do infinito, e na geometria não existem fortes intuições sobre o infinito.

Foi o 5º Postulado de Euclides que gerou as primeiras discussões sobre as geometrias não-euclidianas, segundo Fossa (2011, p. 148) “Foi só com a descoberta de geometrias não euclidianas que se mostrou que é impossível demonstrar o quinto postulado a partir dos outros”. Este autor também afirma que

As tentativas de demonstrar o quinto postulado resultaram em uma enorme expansão do conhecimento geométrico e, de fato, a geometria tornou-se o mais importante campo da investigação matemática durante séculos. (FOSSA, 2011, p.148)

Levando-se em consideração as ideias de Fossa (2011), e analisando-se a situação-problema proposta aos alunos é possível ver que a relação entre ambas é

importante, pois as discussões sobre o 5º Postulado foram o estopim sobre o trabalho com as geometrias não euclidianas.

Para que o aluno conseguisse resolver esta situação-problema, precisou novamente mobilizar conhecimentos sobre retas quaisquer, retas transversais e soma de ângulos. Esta foi a situação-problema que gerou, de acordo com as análises, maiores dificuldades para os alunos considerados nesta pesquisa, pois o aluno necessita ter uma ótima compreensão geométrica e espacial, pois é uma questão bastante complexa e possui um caráter sistematizador.

Quanto às considerações elaboradas pelos alunos para responder a situação-problema proposta, apresentamos a resposta do Aluno 2:

Este postulado só é verdadeiro, ou melhor, só é válido, para o plano, pois em uma superfície não plana, a soma dos ângulos não satisfaria o postulado. (ALUNO 2, WELTER, 2014)

Observando-se a resposta do Aluno 2, é possível observar-se que o mesmo, elaborou considerações importantes sobre as discussões acerca do 5º Postulado de Euclides. Percebe-se que o aluno em questão, compreendeu os elementos que geraram a discussão sobre as geometrias não euclidianas. Analisando-se a resposta do Aluno 2 observa-se que entendeu que o postulado só é válido no plano, porém no espaço o mesmo não tem sentido, pois a soma dos ângulos, neste caso, não satisfaria o postulado. Quanto aos significados produzidos pelo mesmo, é possível observar que o aluno considerado realizou um tratamento dos dados, ambos na língua natural, conseguindo relacionar a suposição do teorema com suas próprias considerações sobre as discussões que levaram ao surgimento das geometrias não euclidianas.

O Aluno 8 por sua vez, respondeu a questão 15 da seguinte forma

Isto quer dizer que não são retas paralelas e que em dado momento independentemente do ângulo elas vão se cruzar. (ALUNO 8, WELTER, 2014)

É possível observar-se que o referido aluno não elaborou significados conceituais no que tange as discussões acerca do 5º Postulado de Euclides propostas por Fossa (2011), sendo que acabou por confundir-se, de modo que analisando sua resposta percebe-se que o Aluno 8 não compreendeu o que o postulado quer dizer, pois o enunciado fala claramente em retas paralelas, e quando diz que “independente do ângulo elas vão se cruzar”, é possível analisar-se que o aluno não relacionou o conceito de paralelismo com as retas paralelas, pois se fossem utilizadas duas retas com a mesma inclinação, as mesmas jamais iriam se cruzar, o que leva a crer que o aluno não conseguiu produzir significados conceituais considerando a situação-problema.

É importante também levar-se em consideração o que traz o Aluno 9 quando diz

O postulado diz que se somarmos os ângulos internos originários de duas retas interceptadas por uma transversal e esta soma for menos que 180° então neste lado as retas se interceptarão, no entanto, quando pensamos na superfície terrestre, por exemplo, o postulado se torna falso,

pois é possível que duas linhas, contornando a superfície se interceptem em um lado, no entanto a soma destes ângulos internos a transversal é igual a 180°. A partir desta descoberta de que o 5º Postulado não poderia ser usado na esfera, iniciou uma série de estudos em cima de outras superfícies que não a plana, como por exemplo, a esférica e a hiperbólica. A estes estudos denominou-se “geometria não euclidiana”. (ALUNO 9, WELTER, 2014)

Quando leva-se em consideração o que foi dito pelo Aluno 9, é possível observar-se que o mesmo elaborou inúmeros significados em nível conceitual, no que tange as discussões sobre o 5º Postulado de Euclides, analisando-as tem-se que se a relação da soma dos ângulos internos referentes a duas retas paralelas for menor que 180° no plano, estas retas irão se interceptar, porém na superfície esférica ou hiperbólica, isto não é verídico. O Aluno 9 também observou que o postulado não pode ser considerado em superfícies esféricas e hiperbólicas, e este fato é o que gerou os estudos denominados de geometria não euclidiana.

As análises indicam que dos onze alunos analisados na pesquisa, foram quatro os que não elaboraram nenhum significado conceitual sobre a referida situação-problema. Somente um aluno, o Aluno 9 foi capaz de dar uma resposta apresentando mais elementos, com vários significados, conforme apresentado anteriormente. Os outros seis também elaboraram significados importantes, porém, nenhum destes foi capaz de produzir muitos ao mesmo tempo. Dentre estes, pode-se destacar o seguinte, *o fato do 5º Postulado de Euclides ser válido somente no plano* (Aluno 1); *o fato da soma dos ângulos internos não satisfazer o teorema no espaço* (Aluno 2); *o fato de que o postulado deveria ser na verdade um teorema, pois precisa de demonstração para uma melhor compreensão, já que é difícil compreendê-lo somente escrito; o fato de tender sempre ao infinito, o que faz com que não devesse ser considerado um postulado; o fato de não ser possível usar-se os quatro postulados anteriores de Euclides para explicá-lo e o fato de suas discussões terem gerado a criação das geometrias não euclidianas* (Aluno 3).

Com relação aos registros de representação semiótica, observa-se que a situação-problema considerada apesar de não necessitar de uma conversão aparente, leva o aluno a utilizá-la mentalmente, pois os mesmos precisam imaginar o que o 5º Postulado de Euclides quer dizer, já que somente desta maneira conseguirão compreender o que acabou por gerar as geometrias não-euclidianas. Portanto analisando-se as respostas dos alunos percebe-se que não é muito fácil responder o que é pedido, pois esta é uma situação-problema complexa, que tem caráter sistematizador e amplia os entendimentos propostos nas outras duas questões, apresentando as geometrias não euclidianas, e isso é o que pode ter levado à dificuldade que alguns alunos tiveram ao tentar respondê-la.

3 Considerações Finais

A presente pesquisa teve como foco principal indicar quais os significados produzidos pelos alunos de um curso de formação de professores de matemática no

desenvolvimento de situações-problemas que tenham relação com conceitos de geometria plana, mais especificamente aos ligados ao paralelismo entre retas. Levando-se em consideração o referencial teórico utilizado, os dados empíricos produzidos durante a elaboração da pesquisa e a metodologia proposta, tornou-se possível elaborarem-se inúmeras considerações acerca da temática.

É importante considerar-se as diferentes unidades de análise elaboradas nesta pesquisa, sendo que ambas estão interligadas por um conceito da geometria plana, o paralelismo, todas elas também levam em consideração os registros de representação semiótica, sendo Duval (2003, p.15) a “[...] compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas.”, percebe-se que é preciso mobilizar vários registros de representação em face de um mesmo objeto matemático. Estas unidades de análise relacionam-se ao paralelismo com relação, especialmente, aos conceitos circunferência, ângulos e 5º Postulado de Euclides.

Os significados produzidos pelos alunos considerados nesta pesquisa foram muitos, e também de grande valia, percebe-se, a grande importância da utilização dos registros de representação semiótica nesse meio.

Ao tratar o paralelismo com relação à circunferência, os alunos foram capazes de destacar a importância do raio e a medida do mesmo, sendo que compreenderam ser igual à distância entre os pontos de intersecção existentes nas duas retas paralelas, o que garante o paralelismo entre ambas. Também teve grande relevância o trabalho com os registros de representação semiótica sendo que utilizou-se a conversão entre a língua natural, para o registro figural, e a partir deste registro, os alunos foram capazes de apresentar argumentos que respondessem a situação-problema proposta.

No momento em que o paralelismo foi tratado a partir da relação estabelecida com ângulos, é compreensível que os alunos produziram significados utilizando o conceito de ângulos alternos internos e externos, ângulos colaterais internos e externos, ângulos congruentes, ângulos suplementares e soma de ângulos. Percebe-se claramente no decorrer da análise dos dados empíricos que o tratamento utilizado pelos alunos no desenvolvimento da questão foi satisfatoriamente importante para seu aprendizado.

Ao trabalharem o paralelismo relacionado ao 5º Postulado de Euclides, observa-se que os alunos produziram inúmeros significados, que vão de encontro com as ideias apresentadas por Fossa (2011), dentre estes, pode-se destacar o fato do 5º Postulado de Euclides ser válido somente no plano; a soma dos ângulos internos não satisfazer o teorema em superfícies esféricas e hiperbólicas; o teorema dever ser na verdade um postulado, pelo fato de tender sempre ao infinito; e a grande importância das discussões acerca do postulado terem gerado a criação das geometrias não euclidianas.

A pesquisa realizada aponta a importância de os alunos estabelecerem relações entre vários conceitos de geometria plana, para que desta forma consigam elaborar significados importantes a partir da mobilização de registros de representação semiótica, em face ao conceito de paralelismo. Essa relação tem grande importância na formação

dos professores de matemática, pois pode contribuir na apropriação das significações conceituais e na compreensão da organização do ensino de tais conceitos, intervindo, assim, positivamente em sua atuação junto aos seus futuros alunos.

Referenciais

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Volume 2. Brasília, 2006. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb>>

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 4 ed.2002.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. Volume 9, 6 ed, São Paulo, Ed atual, 1985.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus, pp. 11-33, 2003. (Coleção Papirus Educação).

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. *Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem.* eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

FOSSA, John A. **Ensaio sobre a educação matemática**/John A. Fossa. – 2 ed.—São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011 p.139—148 “O que há de errado com o Quinto Postulado de Euclides?”

GODOY, Arilda Schmidt. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades**. *Revista de Administração de Empresas*. São Paulo, v.35, n.2, p.57-63 Mar./Abr. 1995. Disponível em:

LEIVAS, José Carlos Leivas. **Educação geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria**. *Educação matemática em revista – RS*. Ano 13 - 2012 - número 13 - v.1 - p. 9 a 16.

MACHADO. Nilson José. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua**. São Paulo: Cortez: Autores associados, 1990. (Coleção Educação contemporânea).

MORETTI, Mércles Thadeu. **O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática**. *Revista Contrapontos – ano 2- n.6 –p.423-437 – Itajaí, set./dez. 2002.*

PALLES, Camila Molina; SILVA, Maria José Ferreira da. **Visualização em Geometria**. Disponível em:

<http://matematica.ulbra.br/ocs/index.php/ebiapem2012/xviebrapem/paper/viewFile/638/339>. S/d.

SOARES, Maria Arlita da Silveira. **Os números racionais e os registros de representação Semiótica: análise de planejamentos das séries finais do ensino Fundamental**. Ijuí. Dissertação de Mestrado em Educação nas Ciências da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ), 2007.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicações em sala de aula**. Tradução Paulo H. Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. p. 438-440.