

**QUE ENTENDIMENTOS SOBRE FRAÇÕES E SEUS SIGNIFICADOS  
ALUNOS, DE DIFERENTES IDADES E NÍVEIS DE ESCOLARIZAÇÃO,  
DESENVOLVEM DE FORMA AUTÔNOMA A PARTIR DO MÉTODO  
KUMON<sup>1</sup>**

Luciane Zanchi Horn Braz<sup>2</sup>

**Resumo:** O presente artigo se constitui a partir de uma pesquisa qualitativa e tem como objetivo identificar que entendimentos sobre frações e seus significados, alunos de diferentes idades e níveis de escolarização, desenvolvem de forma autônoma a partir do método Kumon. Os dados empíricos foram produzidos a partir de um instrumento de avaliação composto por treze (13) situações-problema, e mais cinco (5) questões pessoais sobre a escolha pelo método. Estas situações-problema foram aplicadas a quatro (4) alunos matriculados no método Kumon que estão resolvendo no método os conteúdos relacionados às frações. Para as análises foram consideradas, especialmente, proposições apresentadas por Kumon (2009), Van de Walle (2009), Caraça (2002), Bertoni (2008), Moura (2007), Brasil (1997) e Damico (2007). O artigo se estrutura nas seguintes unidades de análise: I) Desenvolvimento da autonomia dos alunos do método Kumon; II) O estudo das frações; III) O significado das frações. De acordo com a pesquisa acredita-se que o método Kumon possa favorecer um estudo individualizado e que este método de ensino e aprendizagem da matemática também ofereça condições para formar alunos autodidatas.

**Palavras-chave:** aluno; níveis de escolarização; estudo individualizado; estudo das frações; significados das frações;

### **Introdução**

A matemática foi criada para satisfazer as necessidades instrumentais e integrativas do homem (MOURA, 2007). Ela tem se mostrado um conhecimento de difícil compreensão para muitas pessoas, sendo normalmente considerada a disciplina com maior índice de resistência e repetência, inclusive para alunos na graduação.

A procura pelo método Kumon vem aumentando gradativamente, mesmo sendo considerado, pela grande maioria, como um processo mecânico, “adestrador de mentes”. Segundo Toru Kumon (1997), o principal objetivo do método é formar alunos autodidatas, ou seja, que estudam e resolvem sozinhos seus problemas, identificando e corrigindo os próprios erros.

---

<sup>1</sup> Artigo elaborado para a Disciplina Estágio Curricular Supervisionado: trabalho de sistematização do curso de Matemática, sob orientação da professora Mestre Emanuelli Bandeira Avi.

<sup>2</sup> Graduando do curso de Matemática – Licenciatura da UNIJUI – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.

A origem do método ocorreu em setembro de 1956, em Moriguchi, província de Osaka no Japão, quando foi aberta a primeira unidade Kumon na cidade, tendo como orientadora a Sra. Teiko, esposa de Toru Kumon. O método então começou a se expandir pelo mundo. No Brasil as atividades pedagógicas desse método iniciaram-se em 1977, na cidade de Londrina, sendo a primeira unidade da América do Sul, atualmente há mais de 1700 unidades oferecendo o curso de matemática.

Tudo começou em 1954, quando o filho mais velho de Toru Kumon, Takeshi, que estava no 3º ano do Ensino Fundamental trouxe para casa um teste de matemática onde havia tirado uma nota baixa. A esposa de Toru, preocupada com a situação, alertou Toru sobre a nota que seu filho havia tirado e questionou se ele não poderia fazer algo para ajudar, já que era professor de matemática e ensinava tantos filhos de outras pessoas na escola, mas não se importava com seu próprio filho. Na ocasião Toru não deu muita importância, pois seu filho sempre tirava notas boas, achando que aquela era apenas uma nota ruim.

Toru era graduado em matemática na Universidade de Osaka e lecionava em universidades, porém desde a graduação não havia mais aberto um livro primário. Folhando o livro do seu filho, encontrou diversas questões de cálculo, problemas e exercícios, mas que não lhe parecia haver uma distribuição sistemática do conteúdo, ficando sem saber como poderia então ajudar seu filho. Sem opção, começou a montar alguns exercícios, colocando ao filho, três metas a serem atingidas:

1. Limitar o tempo de estudo diário do filho em 30 minutos;
2. Fazer com que ele conseguisse resolver questões dadas em vestibulares, ao invés de objetivar somente a melhora do desempenho do Ensino Fundamental;
3. Fazê-lo chegar, o mais cedo possível, à resolução de equações.

Toru sempre voltava tarde para casa, não sendo possível ensinar seu filho à noite, achou então como solução, preparar exercícios sempre na noite anterior, e deixá-los para que sua esposa entregasse ao filho. Como ele não poderia ficar ao lado do filho ensinando-o, teve que montar os exercícios de modo que o filho pudesse resolvê-los sozinho. Toda noite, ao chegar em casa, verificava os exercícios resolvidos e preparava os do dia seguinte. Nos exercícios em que seu filho cometia erros, fazia anotações e fazia com que o próprio filho os corrigisse. As folhas de exercícios eram do tipo A5, o mesmo tamanho do material utilizado atualmente. Ele preenchia a frente e o verso da folha, elaborando questões que poderiam ser resolvidas em 30 minutos. O filho deveria anotar o tempo que levava para resolver os exercícios daquela folha.

Passado algum tempo, conhecidos e pais de alunos passaram a lhe pedir muitos conselhos sobre crianças que não conseguiam bom desempenho no Ensino Fundamental. A cada vez, discutia detalhadamente sobre a situação delas e apresentava uma parte das folhas de exercícios feitas pelo seu filho. Os pais copiavam exercício por exercício e faziam com que seus filhos os resolvessem. Todas as crianças, sem exceção apresentaram ótimos resultados em curto tempo. Sentiu cada vez mais, que não deveria limitar o uso do material e método somente com seu filho e com as crianças mais próximas, mas que deveria compartilhá-los com o maior número possível de crianças.

De acordo com o livro *Palavras para Gravar no Coração* (2004), de Toru Kumon, a missão do método Kumon é pesquisar o ponto ideal de cada criança e desenvolver técnicas de orientação cada vez melhores, para que cada uma desenvolva ao máximo o próprio potencial através do estudo autodidata.

Segundo Toru (2009, pg.19), há mais de 1600 unidades de matemática do método Kumon em todo o Brasil, com mais de 100 mil alunos. A variedade de alunos é grande, alguns alunos são considerados brilhantes por estarem adiante da escola, outros que estão defasados em relação à escola e aqueles que ainda não são tão bons em matemática. Segundo o autor, a maioria dos alunos do Ensino Fundamental não possui bom desempenho em matemática, então por que a maioria deles, frequentadores do método Kumon, consegue dominar a matéria com tranquilidade?

O segredo é simples: o método Kumon oferece orientações diferenciadas, de acordo com a capacidade individual de cada estudante. Na sala de aula tradicional, o mesmo programa é dado para todos os alunos, pois a diferenciação é feita segundo a série escolar e não a aptidão específica de cada estudante. As diferenças individuais são colocadas de lado, em nome do ensino coletivo. O resultado é conhecido: a maioria dos alunos detesta Matemática e fica abaixo do nível de desempenho razoável na matéria, enfrentando recuperações e reprovações. Mas, com o material adequado e orientação específica, independente da série escolar, o aluno passará a gostar de Matemática e a estudá-la com prazer e ânimo dobrados. Assim, avançará os estágios mais elevados, sem sobrecargas pedagógicas e psicológicas, de acordo com sua capacidade e seu próprio esforço. (2009, pg. 20)

Para alcançar qualquer objetivo é preciso esforço contínuo para avançar passo a passo, sem interrupções. Especialmente no caso da matemática, de acordo com os princípios que orientam o método Kumon, é preciso acumular gradativamente os conhecimentos básicos para conseguir dominá-los.

Toda criança gosta de estudar, desde que lhe sejam dados assuntos adequados à sua capacidade, ele começa a detestar os estudos quando é obrigada a enfrentar conteúdos acima da sua capacidade. A diretriz do método Kumon resume-se em não

exigir demais da criança, oferecendo a ela apenas conteúdos adequados à sua capacidade, essa estratégia educacional desperta o interesse nos estudos e alimenta a força de vontade do estudante.

O material do Kumon é elaborado de maneira linear e assim, começa pelas questões básicas para chegar às mais complexas. Os orientadores por sua vez, procuram despertar e estimular o interesse e a força de vontade do aluno. Durante a realização dos exercícios, o orientador observa atentamente a rapidez e a exatidão com que o aluno resolve os exercícios. O método Kumon oferece estudo individualizado porque os pontos críticos, nos quais a criança encontra maiores obstáculos e o período em que o aluno perde o ritmo dos estudos, variam de estudante para estudante.

De acordo com Toru, as crianças que estudam pelo método Kumon adquirem a teoria matemática sem perceberem. Ao resolver e fazer revisões dos exercícios, o aluno pode desenvolver a capacidade de fazer uma série de associações mentais como levantar hipóteses, confirmar suas suposições e chegar às próprias conclusões, que dificilmente serão esquecidas, pois não foram informações recebidas e memorizadas, mas construídas pelos alunos. O material está estruturado para que a cada estágio, o aluno desenvolva a concentração, cálculo mental, capacidade de ler e interpretar, hábito de estudo e leitura.

O material do Kumon é dividido em estágios nomeados por letras do alfabeto que vão do 7A ao O. O primeiro estágio, o 7A contém ilustrações, que servem para familiarizar a criança com a noção de quantidade. O estágio 6A continua centrado na sequência numérica, apresentada na forma de ilustrações de quantidades de bolinhas. O 5A introduz exercícios destinados a ajudar a criança com tarefas que exigem a utilização do lápis. No 4A o aluno inicia a contagem e a escrever a sequência numérica de 1 a 100. Nos estágios 3A e 2A o aluno trabalhará adições, utilizando o cálculo mental. No A o aluno somará números de dois algarismos e será introduzida a subtração. No estágio B aparecerão as contas de adição e subtração armadas de até três algarismos. A criança aprende primeiramente no estágio C, a tabuada, depois fará a multiplicação e a divisão de números de um algarismo por um algarismo. O estágio D traz exercícios de multiplicação de números de dois algarismos e divisão com divisores de dois ou mais algarismos, também aparece a transformação de fração imprópria em fração mista e vice-versa, e em seguida é dada a simplificação. No estágio E, o aluno aprende as quatro operações com frações, escrevendo todas as passagens intermediárias para demonstrar como chegou à resposta. Os conteúdos dos estágios G, H e I referem-se aos da segunda

fase do Ensino Fundamental. O G traz numerosos exercícios de operações com números positivos e negativos e expressões algébricas. O H contém equações e sistemas de equações lineares e problemas de equações lineares. No estágio I os assuntos enfocados são os fundamentos da fatoração, raiz quadrada, equação quadrática e função quadrática. No J o aluno estudará fatoração, equações e funções. O aluno do estágio K deve desenhar gráficos de vários tipos de funções e estudar as equações e inequações. O estágio L apresenta a meta do método Kumon aos alunos do ensino médio, e está voltado para o estudo de diferenciais e integrais. O estágio M é dedicado ao estudo mais profundo das funções trigonométricas e aos elementos da geometria, como reta, círculos e cônicas. O conteúdo do estágio N desenvolve a perícia do aluno em vetores, matrizes e relações. O último estágio do método, o estágio O, o aluno aprende progressões, limites e diferenciais.

Cada estágio tem um objetivo claro de conteúdo, que dá sustentação ao próximo conteúdo, ampliando a capacidade do estudante. Conforme o aluno desenvolve sua capacidade de estudo e domina os assuntos básicos, menor é a necessidade de se trabalhar muitas folhas do mesmo assunto. Outra característica do material são os pontos de desafios. Ao longo de todo o material existem pontos de desafios ou de dificuldade maior, que têm duas funções: a primeira é identificar alunos de maior capacidade, pois estes geralmente não apresentam dificuldades em resolver estes exercícios e a segunda é aumentar ainda mais a capacidade dos estudantes.

Uma das características do material do Kumon é a aplicação de exemplos, o aluno deve deduzir a maneira de resolver os exercícios a partir do exemplo que lhe é dado inicialmente. Quando o aluno iniciar o estágio J, ele já desenvolveu o autodidatismo e está apto para deduzir as fórmulas sem o auxílio da orientadora. O estudante já possui capacidade suficiente para aprender as teorias matemáticas e para aplicar os conhecimentos acumulados durante o curso.

Dessa forma, a pesquisa que fundamenta a presente escrita tem por objetivo identificar os entendimentos sobre frações e seus significados, bem como a importância do estudo individualizado e da autonomia do aluno na compreensão dos mesmos. Esse objetivo é delimitado a partir da problemática: que entendimentos sobre frações e seus significados alunos, de diferentes idades e níveis de escolarização, desenvolvem de forma autônoma a partir do método Kumon?

## 1. Procedimentos Metodológicos

A pesquisa se faz a partir de um enfoque qualitativo, uma vez que tem caráter exploratório, nos quais se desenvolvem ideias e entendimentos a partir de padrões e recorrências. A pesquisa qualitativa:

É o caminho do pensamento a ser seguido. Ocupa um lugar central na teoria e trata-se basicamente do conjunto de técnicas a ser adotada para construir uma realidade. A pesquisa é assim, a atividade básica da ciência na sua construção da realidade (MINAYO, 2003, p. 16-18).

O levantamento de dados será feito na unidade Kumon de Ijuí. Neste levantamento serão analisadas as fichas dos alunos matriculados, verificando quantos alunos estão realizando as atividades do final do estágio D e início do estágio E, referente às frações. Como no Kumon o material didático evolui em pequenos degraus e incluem exemplos quando novos conceitos são introduzidos, apenas serão analisados os alunos que estão desenvolvendo ou já desenvolveram o final do estágio D e início do estágio E.

A proposta inicial é analisar que entendimentos sobre frações e seus significados, alunos de diferentes idades e níveis de escolarização, desenvolvem de forma autônoma a partir do método Kumon, para isso foi explorado o material didático e analisado certa quantidade de alunos matriculados nesses estágios.

Primeiramente foi realizada uma conversa com a orientadora da unidade, solicitando que a mesma escrevesse sobre seus entendimentos com relação a eficiência do método para seus alunos. Posteriormente foram selecionados alunos que estão nos estágios D e E, e que estejam em diferentes anos na escola sendo estes: que ainda não tiveram frações na escola, que estão estudando neste ano, e ainda, alunos que estudaram frações na escola há algum tempo, a partir dessa seleção foi aplicado um questionário com os conceitos relacionados às frações. O questionário foi aplicado em 4 alunos, os quais no decorrer da pesquisa serão identificados como Aluno A, Aluno B, Aluno C e Aluno D.

A pesquisa teve o objetivo de identificar o entendimento do conceito de fração em seus diferentes significados e contextos, bem como, a importância do estudo individualizado e da autonomia do aluno na compreensão desses conceitos. Para tanto, foi utilizado um questionário com 13 questões contemplando diferentes significados da fração: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo, e ainda

questões pessoais sobre o porquê da procura pelo método Kumon e a sua opinião sobre ele.

A coleta de dados foi feita em um dia em que os alunos fossem resolver suas atividades do método. Os dados foram coletados logo após os alunos realizarem seus estudos no Kumon e levaram, em média, 15 minutos para responder o questionário.

Nessa perspectiva a presente pesquisa busca identificar e compreender os entendimentos sobre frações, que alunos de diferentes idades e níveis de escolarização, compreendem de forma autônoma. Desta forma o teste diagnóstico, os registros dos alunos e a escrita feita pela orientadora do método, serão considerados como material empírico, juntamente com um diário de campo desenvolvido durante a realização do diagnóstico. As análises se fazem a partir de proposições apresentadas por Kumon (2009), Van de Walle (2009), Caraça (2002), Bertoni (2008), Moura (2007), Brasil (1997) e Damico (2007).

## **2. O estudo das frações: quais entendimentos podem ser produzidos?**

As representações fracionárias e decimais dos números racionais são conteúdos desenvolvidos nos dois últimos anos da primeira fase do ensino fundamental. Porém, o que se constata é que os alunos chegam à fase seguinte sem compreender os diferentes significados, associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo envolvendo esses números. Essas dificuldades segundo os PCN possivelmente devem-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais. Os aspectos apontados no documento apontam para uma necessidade de se elaborar propostas de ensino que de fato possibilitem ao aluno a compreensão plena do conceito de fração. O que se observa em relação ao ensino é uma forte tendência para introduzir esse conceito apenas a partir da relação parte-todo.

Caraça (2002) afirma que os homens não aprenderam a contar porque conheciam os números naturais e sim pela prática diária, e lembra que os números racionais surgiram da necessidade de medir e não da impossibilidade da divisão, numa visão estritamente aritmética.

### **2.1 Desenvolvimento da autonomia dos alunos do método Kumon**

Ao valorizar o ensino individualizado, o Kumon vem realizando e programando uma proposta de educação centrada na criança, onde o aluno inicia seus estudos por um

ponto adequado à sua capacidade: se for capaz, progredirá rapidamente, se não, passará para etapa seguinte de estudo quando, com tranquilidade, houver dominado o conteúdo anterior.

Para alcançar qualquer objetivo, é preciso esforço contínuo e avançar passo a passo, sem interrupções, especialmente no caso da matemática, é necessário acumular gradativamente os conhecimentos básicos para conseguir dominá-los.

Num sistema tradicional de educação, os alunos com mais dificuldades não conseguem acompanhar a aula, enquanto os mais capazes são obrigados a marcar o passo. De acordo com o Toru Kumon (1999, pg.17):

A filosofia do Kumon consiste em orientar cada aluno de acordo com sua capacidade, valorizando e desenvolvendo ao máximo o seu potencial. Conseqüentemente, o aluno ganha maior capacidade de estudos e obtém ótimas colocações em exames de admissão. Contudo, o objetivo do Kumon não se restringe ao bom desempenho em provas, mas busca desenvolver o potencial do aluno a fim de que, com autoconfiança e com reserva de capacidade, ele possa seguir adiante, resolvendo, por si mesmo, os seus problemas.

Toda criança tem, dentro de si o desejo de se desenvolver e possui potencial e força para crescer. A primeira meta do método Kumon (2008, pg.23) é: “fazer com que o aluno consiga realizar com rapidez, exatidão e em grande quantidade aquilo que pensa ser simples e que domina completamente”. Quando isso se torna suficiente, o que parecia ser difícil passa a ser muito fácil, o que acaba estimulando a vontade de estudar nas crianças.

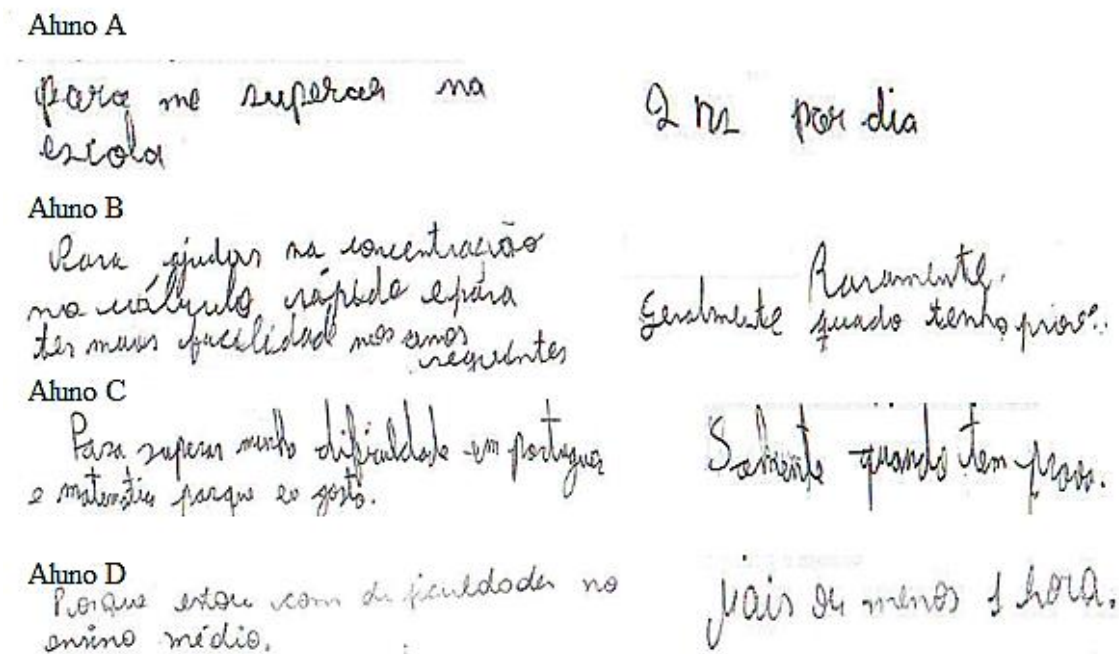
O aluno do Kumon frequenta a unidade duas vezes por semana, a flexibilidade de horários é uma característica e um atrativo de um ensino individualizado do método. O tempo de estudo é variável, dependendo da complexidade do assunto em questão. Durante os demais dias da semana recomenda-se um tempo diário de estudo em casa de trinta minutos.

Como a proposta do método é manter um estudo diário, acredita-se que se isso for feito, tende a facilitar o hábito de estudo, que pode se consolidar pelo prazer das conquistas diárias. Segundo a orientadora, muitos dos alunos matriculados no Kumon seguem à risca os critérios de estudo estabelecidos pelo método, que é de resolverem somente o que lhe é proposto para o dia, não deixando todas as atividades para serem resolvidas em um único dia, isso facilita o hábito de estudar diariamente e de forma autônoma.



Quando os alunos foram questionados sobre o porquê da procura pelo método Kumon e para além do Kumon quanto tempo diário dedicavam para os estudos, os alunos foram bastante sinceros em suas respostas.

Figura 1: respostas das questões pessoais 1 e 2



Fonte: dados produzidos na pesquisa (BRAZ, 2017).

Considerando as respostas dos alunos A e D, que são alunos que estão estudando conteúdos diferentes do nível ao qual estão no método, os mesmos dão indicativos de terem adquirido o hábito de estudo individualizado. Já os alunos B e C que estão estudando na escola os mesmos conceitos que no Kumon, afirmam que o tempo de estudo diário do método é suficiente também para darem conta dos conteúdos de aula, não havendo necessidade de estudos complementares.

De acordo com Kumon (2009, pg. 63-67), as principais características do método Kumon para o estudo individualizado, que busca desenvolver o autodidatismo do aluno, podem ser resumidas nos seguintes tópicos:

1) *Aprender por intermédio dos alunos*: quando Toru elaborou o material para ajudar seu filho, o objetivo era fazer com que ele chegasse às equações o quanto antes. Baseado no andamento dos estudos do filho, Toru teve que redefinir sua meta, pois soube que era possível o aluno se desenvolver muito além do que ele esperava.

- 2) *Respeitar o ritmo de cada aluno*: o aluno estuda no seu ritmo, de acordo com a capacidade e compreensão que demonstrar e fazendo as repetições que necessitar, por isso não precisará limitar seu ritmo ao dos outros alunos, podendo dominar completamente o conteúdo.
- 3) *Desenvolvimento do autodidatismo*: para aumentar a eficácia dos estudos é preciso fazer com que os alunos tomem uma postura mais dinâmica em relação aos estudos. No método Kumon os alunos passam a realizar um estudo mais ativo, uma vez que precisam solucionar os exercícios por si próprios.
- 4) *Corrigir o próprio erro*: tão logo o aluno resolva os exercícios do dia, ele os entrega ao orientador e se houverem erros, estes devem ser corrigidos pelo aluno. No Kumon é valorizada a capacidade de autocorreção imediata do próprio aluno.
- 5) *Avançar passo a passo*: o material do Kumon é aprimorado a cada ano, com o objetivo de tornar mais suave o processo de assimilação do conteúdo e facilitar a evolução dos estudos.
- 6) *Estudo diário*: no método há a exigência de apenas um breve fração de tempo diário para a aprendizagem.
- 7) *Concentrar-se no estudo da Matemática*: a segurança de dominar pelo menos uma disciplina possibilitará o aluno a elevar suas notas também nas outras e será o caminho mais curto e eficaz para ingressar nas melhores notas.
- 8) *Evitar erros elementares*: os erros que mais prejudicam os alunos são os de cálculos. Os alunos cujos estudos priorizam a fixação da capacidade de cálculo cometem pouquíssimos erros desse tipo.
- 9) *Prático e eficaz*: é o método de estudo mais econômico, para estudar matemática o lápis é o material suficiente para se adquirir uma sólida capacidade.
- 10) *Ter metas e planejamento*: estudar com metas estabelecidas e uma programação de estudo de longo prazo, ou seja, se forem traçados um programa de estudo para a criança ela irá direcionar espontaneamente seus estudos para atingir esse objetivo.

De acordo com Kumon:

suponhamos que um aluno de 5ª série não saiba resolver frações. Examinando melhor os seus conhecimentos, verificamos que ele não conhece divisão e multiplicação. Ainda, em subtração e adição, seus conhecimentos são insuficientes. Este é o caso mais comum. Não adianta fazê-lo treinar frações, pois desse modo, ele não conseguirá dominá-las. É preciso que ele retome conteúdos anteriores mais fáceis, como a subtração e a adição, e, na medida em que for dominando, passe à multiplicação e à divisão. É esta a forma eficaz de capacitá-lo a resolver frações. (1999, pg. 15 )

No ensino da matemática, há estudos e métodos específicos que utilizam a memorização, acompanhada de conteúdos, como é o exemplo do Kumon, que se difundiu pelo mundo todo a fim de amenizar as dificuldades da matemática através de fixação de conteúdos e memorização, comprovando o sucesso dos alunos que com este método estudaram, a partir de grande número de aprovações em vestibulares, além de “descobrir o potencial de cada indivíduo, desenvolvendo lhe as habilidades ao máximo limite, formando assim pessoas responsáveis e mentalmente desenvolvidas, que são as que contribuem para a comunidade global.” (KUMON, 2001, pg. 07).

No Kumon o ensino de frações se dá no final do estágio D e nos estágios E e F, onde o aluno aprende as quatro operações com frações. O enfoque nestes estágios não é a discussão do conceito de fração, mas sim nas análises dos exercícios realizados. Quando é introduzido o número fracionário no método, logo após as divisões, apenas são demonstradas as diferenças entre os inteiros e as frações, conforme a figura 2:

Figura 2: diferença entre inteiros e frações

Os números do tipo 0, 1, 2 e 3 chamam-se “inteiros”.  
Os números do tipo  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{11}{5}$  chamam-se “frações”.

Fonte: folhas D151a dos blocos do método

A divisão de dois números inteiros pode ter seu quociente (resultado da divisão) representado na forma de fração, desde que o divisor seja diferente de zero. Como no método Kumon os estágios seguem um padrão de conteúdos, ao iniciar o estágio D, o aluno acabou de trabalhar a divisão no estágio C, quando for resolver as atividades do estágio sobre frações, já terá uma noção significativa da divisão.

A representação da divisão no estágio C é realizada da seguinte forma:

Figura 3: exemplo de divisão escrevendo o resto ao lado do quociente

$$\begin{array}{r} 25 \quad | \quad 11 \\ 22 \quad 2 \cdots 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

Fonte: folha C111a do bloco do método

No primeiro bloco do estágio C é feita a introdução da divisão. Quando a divisão for com resto, o mesmo deve ser escrito ao lado do quociente, como demonstra na figura acima. Geralmente nos primeiros cálculos da folha, como demonstra a figura 4, retirada de um bloco de exercício resolvido por um aluno, aparecem casas que devem ser preenchidas com os valores adequados, buscando assim demonstrar a possibilidade de representação de um número fracionário através do quociente.

Figura 4: folha de exercício realizada por um aluno do método

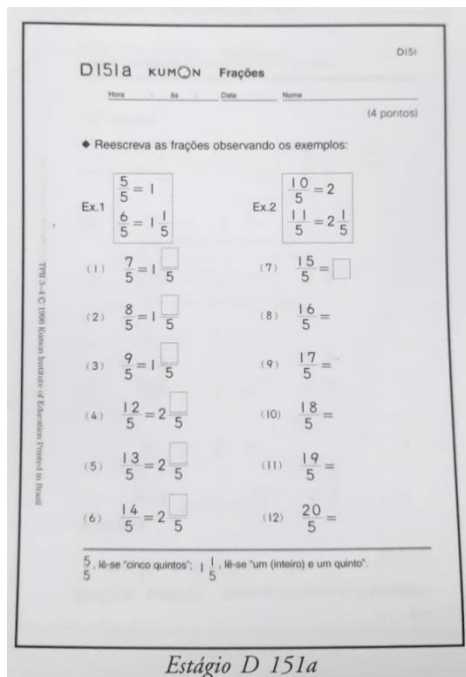
◆ Divida. Escreva os cálculos intermediários:

(1) $\begin{array}{r} 128 \overline{)31} \\ \underline{128} \phantom{0} \\ 4 \phantom{0} \\ \underline{4} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$	(5) $\begin{array}{r} 1398 \overline{)41} \\ \underline{123} \phantom{0} \\ 168 \phantom{0} \\ \underline{164} \phantom{0} \\ 4 \phantom{0} \end{array}$
(2) $\begin{array}{r} 685 \overline{)31} \\ \underline{62} \phantom{0} \\ 65 \phantom{0} \\ \underline{62} \phantom{0} \\ 3 \phantom{0} \end{array}$	(6) $\begin{array}{r} 2298 \overline{)41} \\ \underline{205} \phantom{0} \\ 248 \phantom{0} \\ \underline{246} \phantom{0} \\ 2 \phantom{0} \end{array}$
(3) $\begin{array}{r} 785 \overline{)31} \\ \underline{62} \phantom{0} \\ 169 \phantom{0} \\ \underline{155} \phantom{0} \\ 10 \phantom{0} \end{array}$	(7) $\begin{array}{r} 2573 \overline{)42} \\ \underline{252} \phantom{0} \\ 53 \phantom{0} \\ \underline{42} \phantom{0} \\ 11 \phantom{0} \end{array}$
(4) $\begin{array}{r} 1298 \overline{)31} \\ \underline{124} \phantom{0} \\ 58 \phantom{0} \\ \underline{31} \phantom{0} \\ 27 \phantom{0} \end{array}$	(8) $\begin{array}{r} 3000 \overline{)52} \\ \underline{260} \phantom{0} \\ 400 \phantom{0} \\ \underline{364} \phantom{0} \\ 36 \phantom{0} \end{array}$

Fonte: folha C141a do bloco do método

No estágio D é feita a introdução do número na forma fracionária e sua representação como um número misto, partindo da ideia de divisão não exata de números inteiros, e ainda a simplificação de frações. No estágio C, o primeiro bloco é a revisão de conteúdos, contemplando multiplicação e a divisão, dos blocos D11a até o D141a é explorada a multiplicação e a divisão com mais de dois algarismos e no bloco D151a a introdução da fração como demonstra a figura 5.

Figura 5: introdução às frações



Fonte: folha D151a do bloco do método

O estágio E contemplam as adições, subtrações, multiplicações e divisões de frações. Lembrando que cada estágio tem dez blocos com dez folhas, totalizando cem folhas de exercício o estágio inteiro. Cada criança irá trabalhar com a quantidade de repetições necessárias para desenvolver o seu conhecimento sobre frações.

## 2.2 Frações a partir de alguns entendimentos

As principais configurações dos números racionais, além da sua forma fracionária, é sua forma decimal e de porcentagem, como nos mostra Van de Walle (2009). Este autor chama atenção para conexões de frações com outros conteúdos, como por exemplo, de razão e proporção, tendo em vista que o conceito de parte e do todo da fração é apenas uma forma de razão. Vale ressaltar que a proposta apresentada pelo autor vai de encontro às propostas dos PCN.

De acordo com a proposta de Van de Walle (2009, p.326), um dos melhores caminhos para introduzir o conceito de fração são as tarefas de compartilhar (repartir igualmente), “porém a ideia de partes fracionárias é tão fundamental para um forte desenvolvimento dos conceitos de fração que deve ser mais explorada com tarefas adicionais”, pois assim ajudará os alunos a usarem mais os termos fracionários, levando-os a contar as partes fracionárias e descobrir seus significados.

Os PCN (1997) consideram o ensino das frações como fundamental para a aprendizagem dos números racionais. Para a construção do conceito de número racional, enfatizam a sua utilização em diferentes situações do cotidiano. Os alunos devem ter contato com situações-problema cujas soluções não estejam no campo dos números naturais, possibilitando a aproximação destes ao conceito de número racional. Afirmam, ainda, que a representação decimal é percebida no cotidiano com mais frequência do que a forma fracionária e justificam essa ocorrência devido ao advento das calculadoras decimais. Já o uso de frações no nosso dia a dia é percebido na linguagem oral e limita-se a termos como: metades, terços e quartos.

Os Parâmetros Curriculares destacam três interpretações para a fração: relação parte-todo, quociente e índice comparativo. A relação parte-todo, em geral, é a mais trabalhada pelos professores nos anos iniciais, como divisão de um chocolate ou de uma pizza em partes iguais.

Outro ponto relevante destacado pelos PCN é de que o ensino das frações e dos números racionais demanda bastante tempo para o aluno e para o professor; e que este trabalho é apenas iniciado no segundo ciclo do ensino fundamental, devendo ser retomado e consolidado nos demais ciclos deste nível de ensino.

Segundo Rio Grande do Sul (2009, pg. 57) a abordagem de frações no 6º ano se detém mais na relação parte-todo. No 7º ano, ocorre a expansão do campo numérico dos números naturais para os números inteiros, é neste ano que os alunos ampliam sua capacidade de operar com números fracionários e decimais. O trabalho com números decimais associados ao estudo das frações permite que o aluno estabeleça relações, com autonomia, criando regras que facilitem a sua compreensão. Nesse ano surgem também as frações negativas e o estudo das letras como incógnitas para a introdução de equações de 1º grau.

### **2.2.1 Os significados das frações**

Os números fracionários e decimais fazem parte do cotidiano das pessoas desde muito cedo. As representações fracionárias e decimais dos números racionais são conteúdos desenvolvidos nos dois últimos anos da primeira fase do ensino fundamental. Porém, o que se percebe na sociedade em geral é o pouco domínio de noções sobre frações, bem como dos procedimentos de cálculo envolvendo esses números.

Para Caraça (2002):

os números racionais nascem a partir do momento em que o homem encontra dificuldade para exprimir uma razão não exata, quando há uma impossibilidade de divisão, assim feita uma subdivisão da unidade em n partes iguais, onde uma dessas partes caiba m vezes na grandeza a medir, a dificuldade surge quando m não é divisível por n.

Caraça (2002) salienta três princípios básicos que orientam a evolução de toda a matemática, presente na construção do conjunto dos números racionais:

1. O princípio de extensão, que nos leva a criar novos números por meio dos quais se podem exprimir a medida de dois segmentos;
2. A análise da questão, que mostra que a dificuldade reside na impossibilidade da divisão exata em números inteiros, quando o dividendo não é múltiplo do divisor;
3. O princípio da economia, segundo o qual, com os novos números são abrangidos todas as hipóteses de medição e estes novos números sempre são reduzidos aos números inteiros, quando o dividendo for múltiplo do divisor.

Para Caraça, esses números proporcionam vantagens, como sua representação simbólica  $\frac{m}{n}$  e, a partir da criação desse novo campo numérico, os povos passaram a medir um segmento tomando outro como unidade de medida.

Quando falamos em representação fracionária, os PCN evidenciam que o contato dos alunos no dia a dia com essa representação é pouco frequente. Os PCN sugerem que a prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre às situações que estão implícitas a relação parte-todo, nesse caso, a fração indica a relação que existe entre o número de partes e o total de partes iguais que o inteiro for dividido. Outro significado das frações é a do quociente que se baseia na divisão. Para o aluno essa situação se diferencia da interpretação anterior parte-todo, pois dividir “um chocolate em 3 partes e comer duas dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para três pessoas” (PCN, 1997, p.103).

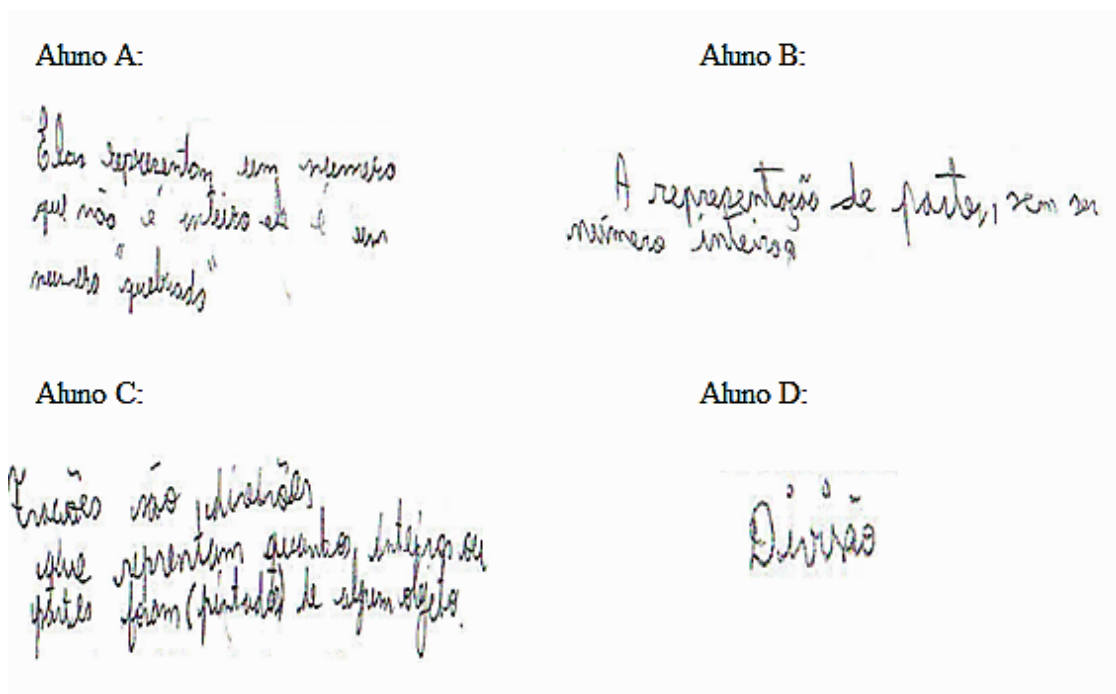
Os PCN sugerem ainda uma terceira situação diferente das duas anteriores “é aquela em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades e uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão” (PCN, 1997, p.104).

Bertoni (2008) cita em seu artigo, que os alunos não tem o conhecimento de que uma fração representa um número, como segue abaixo:

a ênfase na construção desse número foi motivada por inúmeras respostas inadequadas dos alunos a questões propostas. Por exemplo, interrogando-se sobre o que é fração, são comuns respostas do tipo é pedaço, é aquele negócio de dividir figuras, é cortar tiras. Já a pergunta fração é número? gera muitas dúvidas, mas, com certa frequência, aparece a resposta são dois números.

Ao serem questionados sobre o que é fração e o que ela representa, as respostas dos alunos foram bem diversificadas.

Figura 6: respostas da questão de número 1



Fonte: dados produzidos na pesquisa (BRAZ, 2017).

Os alunos C e D entendem as frações como uma divisão, o que nos leva a supor que a forma como é proposto o entendimento de números fracionários no método seja uma forte influência nas suas significações. O aluno D afirma não se lembrar de frações na escola e, portanto, define apenas como divisão, já o aluno C aponta ainda a ideia de representação na forma de figura, que não é explorada no método, porém, como o mesmo está estudando estes conceitos na escola, acredita-se que contribui para este entendimento.

Os alunos A e B definem fração como a representação de um número o que é menos comum. Afirmam ainda equivocadamente que este número é menor que um



inteiro, isso pode ser consequência de que o trabalho com frações próprias, normalmente é mais enfatizado. Outra possibilidade é a forma como no método são feitas as primeiras representações de frações através da divisão, quando, representa-se em quantos inteiros pode ser dividido seguido de uma fração, ou seja, na forma mista, o que pode os levar a crer que fração representa somente a quantidade menor que um inteiro.

Já em relação à questão de número 2: “De que é composta uma fração? O que cada parte representa?”, as respostas apresentaram mais unidade:

Figura 7: respostas da questão de número 2

Aluno A

Ela é composta pelo denominador e o numerador e representa quantos o numerador é quanto foi "comida" sendo partes da

Aluno B

Numerador e denominador. Número que pode ser dividido. Quanto partes foi dividido.

Aluno C

Ela é composta de numerador e denominador. O numerador representa quantos partes foram (divididos) e o denominador representa partes e inteiros.

Aluno D

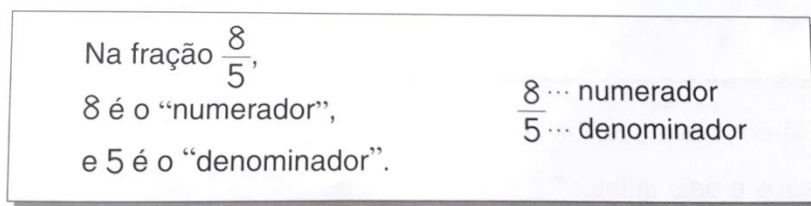
denominador e numerador, denominador de baixo e o outro é cima.

Fonte: dados produzidos na pesquisa (BRAZ, 2017).

No Kumon, as partes de uma fração são apresentadas de forma bem simples, somente denominando cada parte, mas não explicando o que cada uma delas representa. Devido ao nível de escolarização, os entendimentos sobre as frações foram um pouco variado, mas a ideia central é a mesma, de que a fração representa partes de um número inteiro e ainda, que é a divisão de um numerador por um denominador. Apenas um aluno explorou a posição das partes afirmando que numerador e denominador representam a parte de cima e de baixo, sem explorar seus significados.

No método, a maneira como é representada as partes de uma fração é bem simples, como mostra a figura abaixo:

Figura 8: representação das partes de uma fração



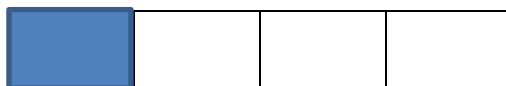
Fonte: folhas D151b dos blocos do método

Em sua obra, Caraça (2002) procura descrever o surgimento dos números racionais como a resposta do homem à necessidade de comparar grandezas, quando a habilidade de contar, que o homem já dominava, não foi suficiente para responder à questão de quantas vezes uma grandeza era maior que outra. Essa ideia está fortemente associada ao tratamento de grandezas contínuas, que não podem ser contadas, mas comparadas com um padrão previamente estabelecido, ou seja, uma unidade de comparação. Esse problema, que hoje denominamos “expressar a medida de uma grandeza em relação a um padrão“, teria solução imediata, obtida por um quociente, sempre que a grandeza tomada como padrão coubesse um número exato de vezes na grandeza a ser medida. As necessidades de contar estão associadas a cinco diferentes significados que uma fração pode apresentar: parte-todo, quociente, medida, operador multiplicativo e número.

### 2.2.2 Frações como parte-todo

Silva e Bastos (2008) destacam que as frações podem assumir a ideia de partição de um todo em  $n$  partes iguais, em que cada parte poderá ser representada por  $\frac{1}{n}$ . Se a pessoa se refere a várias ( $k$ ) partes do todo então temos  $\frac{k}{n}$ . O inteiro  $1 = \frac{n}{n}$  é uma característica básica nesta representação. Este é um significado importante a ser desenvolvido por ser fundamental para o entendimento dos outros quatro tratados aqui.

Frações com esse significado podem ser representadas por figuras que, principalmente no ensino fundamental, podem ajudar o aluno a compreender melhor essa repartição. Se um todo foi dividido em quatro partes iguais e uma foi pintada os alunos podem interpretar essa representação como um processo de dupla contagem: acima do traço da fração se escreve o número de partes pintadas e abaixo do traço escreve-se o número total de partes.



Bertoni (2008) destaca que a relação parte-todo, como usualmente tratada, não gera ideias sobre número fracionário, pois é apresentada de modo abstrato e não significativo, com o viés de ser introduzida sempre a partir de uma unidade, na maioria das vezes retangular, como modelo único para todos os objetos unitários do mundo. O processo de dividir, contar, pintar apresenta artificialismo e não mapeamento com a realidade, o que pode levar a uma dificuldade na significação do número fracionário, bem como, nos significados associados às frações.

Porém, acredita-se que esse tipo de representação pode facilitar a compreensão dos diferentes tipos de frações, possibilitando a visualização de que nem sempre uma fração representa menos que um inteiro.

Os alunos analisados na pesquisa conseguem formar um conceito de frações próprias, impróprias e números mistos, mesmo o método não trazendo estes conceitos mais aprofundados.

Figura 9: frações próprias, impróprias e números mistos

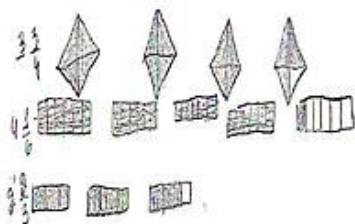
Fração própria	(O numerador é menor que o denominador)	$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$
Fração imprópria	(O numerador é maior ou igual ao denominador)	$\frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}$
Número misto	(Inteiro e fração)	$2\frac{1}{4}, 3\frac{2}{7}$

Fonte: folha D152a dos blocos do método

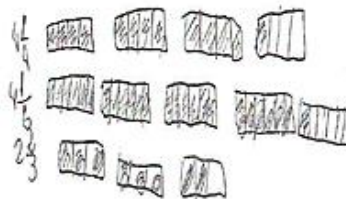
Nas questões onde havia a transformação de frações impróprias em números mistos, ou de número misto em frações impróprias, aparentemente não apresentaram dificuldades em serem resolvidas. Quando foi solicitado que os alunos representassem as frações através de um desenho, os alunos B e C representaram todos em forma de barras. O aluno A variou a representação da primeira alternativa, desenhando e dividindo losangos, mas nas demais representou com barras como os outros alunos. O aluno D, além de errar a alternativa a, não fez a representação através de um desenho.

Figura 9: respostas dos alunos na questão nº9

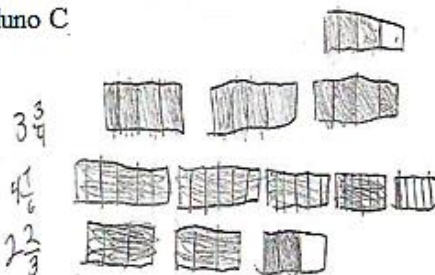
Aluno A



Aluno B



Aluno C



Aluno D

$$\frac{15}{4} \quad 4 \frac{1}{4}$$

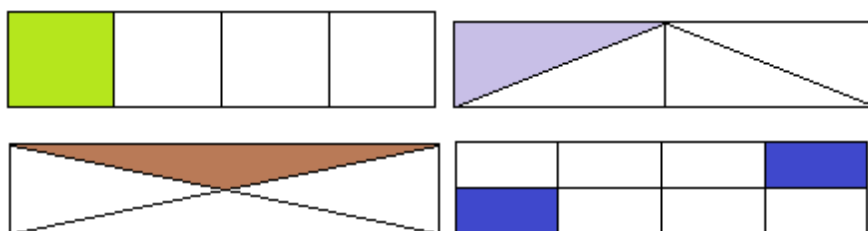
$$\frac{25}{6} \quad 4 \frac{1}{6}$$

$$\frac{8}{3} \quad 2 \frac{2}{3}$$

Fonte: dados produzidos na pesquisa (BRAZ, 2017).

Inúmeras são as situações-problema envolvendo o significado de parte-todo que podem ser encontradas e apresentadas aos alunos normalmente com o auxílio de modelos envolvendo pizzas, chocolates ou pirulitos. Essa ideia de relação parte-todo começa a ser apresentada aos alunos por volta do 4º ano do ensino fundamental inicialmente utilizando na maioria das vezes materiais concretos, papel quadriculado ou dobraduras e são bastante exploradas até o final do 5º ano. Os outros significados são aplicados com outras abordagens na segunda metade do ensino fundamental com o objetivo de ampliar os conhecimentos e resolver problemas (DAMICO, 2007).

Porém, dividir regiões, normalmente retângulos ou círculos, envolve aparentemente uma compreensão da noção de área. Quando tomamos quantidades contínuas divididas em partes congruentes podem surgir dificuldades em relação à identificação da relação entre a área destacada e a área total da figura. As situações seguintes representam  $\frac{1}{4}$  do todo:



Nelas a habilidade requerida é dividir “todos contínuos” em áreas congruentes e não dividi-los em partes com formas iguais. Para a compreensão completa deste significado (relação parte-todo) é necessário identificar qual “todo” está sendo tomado como unidade. A compreensão das frações impróprias não pode ser adquirida por intermédio deste significado.

Van de Walle (2009) chama atenção para os modelos fracionários que podem auxiliar no processo da construção significativa dos conceitos fracionários, além de ajudar nas dúvidas que os alunos possuem sobre o conteúdo. O autor destaca três tipos de modelos para frações:

1º) Modelos de região ou área: é um modelo utilizado para introduzir junto com as tarefas de compartilhamento, pois geralmente o modelo circular, exemplificado por pizzas ou tortas, é o modelo mais comum de área. Podemos utilizar como modelos de região ou área, além das figuras circulares, figuras retangulares, triangulares, quadrangulares.

2º) Modelos de comprimento ou de medida: é um modelo onde os comprimentos devem ser comparados, ou seja, pode-se desenhar linhas e subdividi-las, e com base no comprimento, compará-las. Walle afirma que “as versões manipulativas fornecem mais oportunidade para tentativa e erro e para exploração”. (2009, p. 324)

3º) Modelos de conjuntos: esse último modelo é um pouco mais complexo que os demais. Nele um conjunto de objetos e os subconjuntos do todo compõem as partes fracionárias. Walle destaca que através de sua utilização podemos “estabelecer conexões importantes com muitos usos do mundo real de frações e com conceitos de razão”. (2009, p. 324)

### 2.2.3 Frações como quociente

De acordo com Silva e Bastos a fração  $\frac{k}{n}$  é olhada como uma divisão entre dois números inteiros e o símbolo  $\frac{k}{n}$  representa uma relação entre duas quantidades **k** e **n** que significa que às vezes  $\frac{k}{n}$  ( $n \neq 0$ ) é usado como um outro modo de escrever a divisão de **k** por **n**. Este significado sugere a ideia de partilha, de fazer agrupamentos, de divisão indicada que extrapola as ideias presentes no significado parte-todo.

Em situações de quociente temos duas variáveis, por exemplo, três chocolates e quatro crianças e a fração  $\frac{3}{4}$  corresponde à divisão de três chocolates para quatro

crianças e também ao resultado da divisão (cada criança receberá  $\frac{3}{4}$ ). Para um estudante que está apreendendo frações a diferença entre esta interpretação e a de parte-todo é bastante significativa. Para ele, dividir uma unidade em quatro partes e tomar 3 é diferente de dividir três unidades entre quatro pessoas apesar do resultado ser o mesmo:  $\frac{3}{4}$ ).

Problemas deste tipo auxiliam não somente a compreensão de mais de um sentido da fração, como também o estabelecimento da relação entre as frações e os números decimais. Nesse sentido, devem ser exploradas frações decimais para que os alunos percebam, por exemplo,  $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2$ . A partir de exemplos desse tipo, os alunos podem observar que é possível transformar uma fração decimal em números decimais e vice-versa.

Quando proposta a questão: “*Quatro amigos receberam uma caixa com seis cores de massinha de modelar. Como devem fazer para dividir igualmente as massinhas?*”

Figura 10: resposta dos alunos

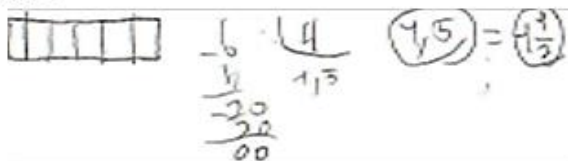
Aluno A

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 4} \\ \underline{4} \phantom{0} \\ 0 \end{array} \quad 1 \frac{1}{4}$$

Aluno B

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 4} \\ \underline{1,5} \phantom{0} \\ 0 \end{array} \quad 1,5$$

Aluno C



$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 4} \\ \underline{3} \phantom{0} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array} \quad 1 \frac{1}{3}$$

Aluno D

$$\frac{6}{4} = 1 \frac{2}{4} = 1 \frac{1}{2}$$

Fonte: dados produzidos na pesquisa (BRAZ, 2017).

No Kumon não são trabalhados problemas envolvendo frações, como os alunos B e C, estão tendo frações e números decimais na escola, resolveram a questão encontrando como resposta primeiramente um número decimal, logo em seguida representaram como um número misto, pois no estágio em que estão no Kumon representam desta maneira. O aluno A considerou a maneira de resolver proposta pelo método. Já o aluno D não utilizou o algoritmo da divisão, representando direto como

uma fração, e na sequência como um número misto, seguido da simplificação da fração para obter a resposta final.

#### 2.2.4 Significados de medida

A ideia é de comparação de duas grandezas em que é estabelecido um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie, como por exemplo, metros para comprimento. A questão exige resposta para as perguntas “quanto cabe em?” ou “quantas vezes?” O que se faz dando um número que exprima o resultado da comparação. O uso das frações para indicar medidas ajuda a formar o conceito de fração e proporciona um contexto natural para a soma de frações, pois se trata da união de duas medidas. Além disso, facilita a introdução da notação decimal.

Na questão de número 13: *“João deve realizar de bike um percurso de 1km. Já percorreu 800m. Como podemos representar essa situação?”*

$$\frac{800}{1000} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

O aluno A representou os 800m de 1km, simplificando até achar a fração "que não dava mais para simplificar" como o mesmo disse, mesmo estando trabalhando com conceitos que vão além do seu nível de escolarização, o aluno A demonstra tem bastante entendimento do processo de representação da fração, bem como da simplificação da mesma, até encontrar a fração irredutível. Os alunos B e C colocaram somente a resposta, dando indicativos de que resolveram mentalmente a questão, para esses alunos esta representação fica bastante fácil, pois estão trabalhando com esse tipo de atividades na escola, e interpretam a questão baseados em seus conhecimentos adquiridos lá e nas atividades desenvolvidas no Kumon. O aluno D questionou se 1km era 1000m, pois ficou com dúvidas, dizendo não lembrar mais desse conteúdo, pois já havia trabalhado a muito tempo atrás na escola, logo em seguida simplificou a fração, mas não encontrou a fração irredutível que seria a resposta que melhor representa a situação. De acordo com a forma com que a pergunta foi proposta, não foi possível que os alunos realizassem registros que possibilitassem a visualização de seus entendimentos acerca do significado de medida. A ideia abordada pelos alunos foi a ideia de razão, ou seja, comparação através da divisão, onde os alunos representaram que eram 800 metros de 1000.

Algumas medidas envolvem frações quando se referem a quantidades que podem ser medidas pela relação de duas grandezas. A ideia de comparação entre duas grandezas verifica-se, por exemplo, no cálculo da probabilidade de um evento, que é

obtido através da razão entre o número de casos prováveis e o número de casos possíveis desse evento ocorrer. Assim, a chance de ocorrer tal evento varia entre 0 e 1, sendo este número, na maioria dos casos uma fração.

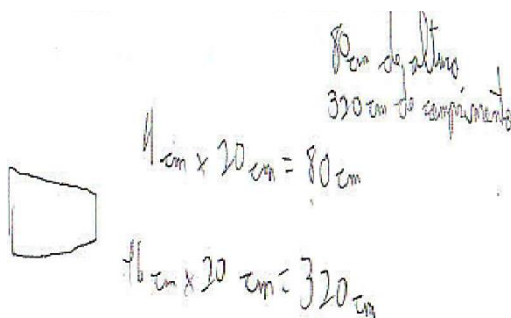
### 2.2.5 Situações operador multiplicativo

A fração como um operador multiplicativo tem um papel de transformador, onde a fração  $\frac{a}{b}$  funciona em quantidades contínuas para reduzir ou ampliar a quantidade no processo. A fração pode ser vista como valor escalar aplicado a uma quantidade.

Este significado define uma estrutura multiplicativa em que o operador  $\frac{k}{n}$  faz duas operações: uma de multiplicação por **k** outra de divisão por **n**. Em quantidades discretas funciona como modo de ampliação, enquanto que em quantidades contínuas funciona como modo de redução. Assim as frações, bem como os números inteiros, podem ser interpretadas como valor escalar aplicado a uma quantidade. Nas ampliações e reduções de figuras as escalas são representadas por frações que correspondem aos respectivos fatores (operadores) de redução ou ampliação.

Na questão 7: “Um carro miniatura construído na escala de 1cm para 20cm, tem 4cm de altura e 16cm de comprimento. Quais as dimensões do carro em tamanho real?”.

Figura 11: resposta do Aluno C



Fonte: dados produzidos na pesquisa (BRAZ, 2017).

Os alunos A, B e C não apresentaram dificuldade em interpretar a questão, resolvendo com facilidade utilizando cálculos mentais. Os alunos B e C por estarem trabalhando com esse tipo de questão na escola resolveram mais rápido que os demais. Quanto a colocarem uma resposta final para a questão, somente o aluno C, especificou o valor da altura e do comprimento. O aluno C queria representar o carro do tamanho



original e solicitou uma régua para fazer o desenho, porém notou que a figura ficaria muito grande e não caberia na folha, representando o carro apenas como um retângulo.

O aluno D não conseguiu interpretar a questão e logo escreveu que não sabia fazer, sempre deixando bem claro em seus comentários que já havia visto este conteúdo há muito tempo atrás e não lembrava mais. Por conseguirem resolver as questões de forma mental, os alunos A e B apresentaram um pouco de dificuldades na hora de representar a resposta da questão, questionando como poderiam fazer a representação dos cálculos que eles utilizaram.

O significado da fração como um operador multiplicativo tem o papel de transformação, onde, assim como o número inteiro, a fração pode ser vista como um valor escalar aplicado a uma quantidade, no caso, o número inteiro. Na questão, os alunos trabalharam com a ideia de que 4 representa  $\frac{1}{20}$  do tamanho real. Esperava-se que os alunos tivessem este entendimento, porém, talvez pela forma como o problema foi redigido, os alunos trabalharam com a comparação entre grandezas, com a ideia de razão e proporção.

### **2.2.6 Significados de número**

Assim como números inteiros as frações não precisam necessariamente referir-se a quantidades ou a situações específicas, isto é, não é necessário fazer referência a uma situação específica ou a um conjunto de situações para nos remeter a fração com significado de número e, conseqüentemente, não há necessidade de abordar esse significado em quantidades contínuas e discretas.

Representar diferentes frações na reta numérica e representar números decimais em forma de fração são atividades que podem ajudar no entendimento do significado de fração como número, pois de acordo com Damico (2007), a reta é um poderoso instrumento para construir o significado de número racional, então utilizá-la no ensino-aprendizagem dos números racionais, em especial os escritos na forma fracionária, traz inúmeras vantagens, entre elas contribuir para a compreensão da densidade dos números racionais e auxiliar na compreensão das operações básicas das frações servindo como modelo representacional.

A representação das frações na reta numérica também pode ser um caso particular da relação parte-todo. Do ponto de vista do ensino não é indicado isolar completamente cada um dos significados dos demais.

Apesar de pouco comum, os dados da pesquisa, conforme já apontado anteriormente, evidenciam que os alunos apresentam uma boa compreensão sobre a fração como representação de um número.

### **Considerações Finais**

Nem todos os alunos apresentam o mesmo desempenho escolar em matemática. Sabemos que o processo de ensino e aprendizagem de cada indivíduo é bastante complexo e nele intervêm inúmeros fatores. Os resultados do trabalho diário em sala de aula ou fora dela, podem ser influenciados por variáveis da estrutura cognitiva, como a motivação e as atitudes, além de fatores da personalidade humana. Muitos alunos não gostam de matemática justamente porque não a compreendem.

O Kumon é um método que possibilita que o aluno se desenvolva nos limites das suas capacidades, considerando o seu tempo de aprendizagem. O conhecimento do ser humano se desenvolve, muitas vezes, quando ele aprendeu algo que estava ao seu redor por iniciativa própria. O material do método, por ter uma seqüência de assuntos que propicia ao aluno o desenvolvimento da capacidade de estudo, pode desenvolver a capacidade de fazer uma série de associações mentais, levantar hipóteses, confirmar suas suposições e chegar às próprias conclusões. Tais conclusões dificilmente serão esquecidas, pois foram geradas pelo próprio aluno. Baseado nisso, o material é estruturado de modo a fazer com que os alunos trabalhem mais os conteúdos básicos, criando, assim condições para um estudo com autonomia dos conteúdos mais avançados.

Entendo ao propor esta pesquisa, que o estudo individualizado pode vir a contribuir muito para a modificação de conceitos negativos com relação a matemática, pois a partir do momento que o aluno domine o básico, realizará as atividades com prazer, além de sua autoestima estar sendo valorizada neste momento. O que o método visa não é somente desenvolver a habilidade acadêmica em matemática, melhorando por consequência as notas, o verdadeiro valor do método está na aquisição da postura e do hábito de estudar de forma autônoma. A proficiência nesse tipo de postura tende a fazer com que os alunos vivenciem a alegria de aprenderem por si e avancem pelas próprias forças, de forma que, mesmo na vida profissional, sejam pessoas que aprendam sozinhas e cresçam, sendo proativas.

Baseado nas colocações de Toru Kumon e a partir dos resultados obtidos, tivemos indicativos de que os alunos compreenderam as frações a partir dos

entendimentos da divisão, como incentiva o método. Cabe destacar que o a finalidade do método não é substituir a escola, considerando que eles têm finalidades diferentes. O método parte de um dos significados para abordar o número na sua forma fracionária, porém, a partir desses significados, se considerarmos o número racional e o mesmo seja abordado dessa forma, podemos dizer que os entendimentos sobre os números racionais na representação fracionária ficam comprometidos aos alunos que frequentam o método.

Os sujeitos da pesquisa apresentaram uma boa compreensão sobre os significados das frações apesar de não terem atividades específicas para a discussão do conceito no método e, em se tratando dos diferentes significados das frações, os alunos não apresentaram grandes dificuldades quando tiveram que interpretar as situações propostas, sugere-se, portanto que uma boa compreensão das frações pode gerar o entendimento desses significados.

## **Referências**

KUMON, Toru. Vamos tentar!: Buscando o potencial intelectual da criança: autobiografia do professor Toru Kumon. Tradução Centro de Pesquisas Toru Kumon – Japão. – São Paulo: Kumon Instituto de Educação Ltda., 2004.

KUMON, Toru. Palavras para gravar no coração. Coletânea de mensagens do professor Toru Kumon. Tradução: Kumon Instituto de Educação Ltda. – São Paulo: Kumon Instituto de Educação Ltda., 2004.

KUMON, Toru. Estudo gostoso da matemática: o segredo do método Kumon. Tradução Silvia Shiota; adaptação Lutherio Maynard; ilustrações Ana Paula Remy Ogihara; revisão Adriana Pinheiro Tomaz/ Rodrigo Roesse da Silveira – 11ª ed. – São Paulo: Kumon Instituto de Educação Ltda., 2009.

KUMON, Toru. Buscando o infindável potencial humano. Tradução: Kumon Instituto de Educação Ltda. – São Paulo: Kumon Instituto de Educação Ltda., 1999.

KUMON, Toru. A origem da ideologia e das atividades do método Kumon: Aprender com as crianças. Guia de estudo do método Kumon. Tradução: Kumon Instituto de Educação Ltda. – São Paulo: Kumon Instituto de Educação Ltda., 2008.

BRASIL. PCN: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC;SEMTEC, 1997.

RIO GRANDE DO SUL, Secretaria de Estado da Educação. Referências Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul: Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Estado da Educação, Departamento Pedagógico: Porto Alegre, RS: SE/DP, 2010.

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentais da Matemática. Gradiva – Publicações Lda. – 4ª ed. Lisboa, 2002.

FIorentini, Dario; LOrenzato, Sergio. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. Coleção formação de professores. 226 p. 26.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MERLINI, V. L. O conceito de fração e seus diferentes significados: um estudo junto a alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2005

MOUTINHO, L. Fração e seus diferentes significados: um estudo junto a alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP 2005.

DAMICO. A. Uma Investigação Sobre a Formação Inicial de Professores de Matemática para o Ensino de Números Racionais no Ensino Fundamental. Tese de Doutorado. PUC. SP, São Paulo. 2007.

WALLE, John A. Van de. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. – 6ª ed. Editora Artmed. Porto Alegre – RS, 2009.

NUNES, T.; BRYANT, P. Crianças fazendo matemática. Tradução Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

BASTOS, Suelly Miranda Cavalcante; SILVA, Aparecido José da. O ensino das frações e seus diferentes significados. Universidade Estadual de Goiás – UEG.

BERTONI, Nilza Eigenheer. Educação e linguagem matemática: frações e números fracionários. Módulo VI: Educação e linguagem matemática IV – Brasília : niversidade de Brasília, 2009.

BERTONI, Nilza Eigenheer. A construção do conhecimento sobre número fracionário = Construction of knowledge about fractional number. Bolema, Rio Claro, SP: Unesp, Departamento de Matemática, v.21, n.31, 2008.

RODRIGUES, Wilson Roberto. Números racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. Mestrado em educação matemática. PUC/SP. São Paulo, 2005.

SANTOS, Aparicio dos. O conceito de frações em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental. PUC/SP. São Paulo, 2005.